

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
Introducció a l'Economia
Curs 2010-2011

Solucions a la Llista de Problemes 3

1. Considera les següents funcions de producció d'un cert bé x a partir d'unitats de treball (h).

a) $q_x(h) = 3h$, b) $q_x(h) = 1/2h$, c) $q_x(h) = h^{1/2}$, d) $q_x(h) = h^2$.

1.1 Representa gràficament cada una de les funcions anteriors, mesurant a l'eix horitzontal la quantitat de treball i a l'eix vertical la quantitat de producte, q_x . Per cada cas, discuteix si el treball presenta rendiments creixents, constants o decreixents a escala.

1.2 Troba el producte marginal del treball corresponent a cada cas, i fes les representacions gràfiques corresponents.

a) $PMg(h) = 3$, b) $PMg(h) = 1/2$, c) $PMg(h) = 1/2h^{-1/2}$, d) $PMg(h) = 2h$.

1.3 Suposem que el cost d'una unitat de treball és 1. Troba el cost variable i el cost variable mig per cada una de les funcions anteriors, i representa gràficament aquestes funcions de cost.

a) $CV(q) = q/3$, b) $CV(q) = 2q$, c) $CV(q) = q^2$, d) $CV(q) = q^{1/2}$.

a) $CVM(q) = 1/3$, b) $CVM(q) = 2$, c) $CVM(q) = q$, d) $CVM(q) = q^{-1/2}$.

1.4 Suposem que el cost fixe és igual a 1 en tots els casos. Troba el cost total, el cost total mig, i el cost marginal associat als nivells de producció $q_x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (nota, per tant, que efectivament podem considerar unitats fraccionàries de treball)

a) $CT(q) = 1 + q/3$, b) $CT(q) = 1 + 2q$, c) $CT(q) = 1 + q^2$, d) $CT(q) = 1 + q^{1/2}$.

a) $CTM(q) = 1/q + 1/3$, b) $CTM(q) = 1/q + 2$, c) $CTM(q) = 1/q + q$, d) $CTM(q) = 1/q + q^{-1/2}$.

a) $CMg(q) = 1/3$, b) $CMg(q) = 2$, c) $CMg(q) = 2q$, d) $CMg(q) = 1/2q^{-1/2}$.

1.5 Considera ara la següent tecnologia, la qual utilitza tant capital (k) com treball (h): $q_x = k^\alpha h^\beta$. Com han de ser α i β per tal de garantir que la funció de producció anterior presenta rendiments constants a escala conjuntament en k i en h ? Sota les condicions anteriors, com són els rendiments del capital i del treball separatament?

Estem interessats en comparar $\lambda F(k, h)$ amb $F(\lambda k, \lambda h)$. Observa que

$$F(\lambda k, \lambda h) = (\lambda k)^\alpha (\lambda h)^\beta = \lambda^{(\alpha+\beta)} k^\alpha h^\beta,$$

i que

$$\lambda F(\lambda k, \lambda h) = \lambda k^\alpha h^\beta.$$

Per tant, si $\alpha + \beta = 1$ aleshores el capital i el treball presenten rendiments constants a escala conjuntament. Si $\alpha + \beta > 1$ aleshores el capital i el treball presenten rendiments creixents a escala conjuntament. Si $\alpha + \beta < 1$ aleshores el capital i el treball presenten rendiments decreixents a escala conjuntament.

És molt fàcil comprovar que quan $\alpha + \beta = 1$, aleshores el capital i el treball, separatament, presenten rendiments decreixents a escala (evidentment, $\alpha \in (0, 1)$ i $\beta \in (0, 1)$).

2. Considera la següent tecnologia per produir béns a partir de treball (h): $q = h^\theta$, amb $\theta \in (0, 1)$. Suposem que el cost fixe ve donat per \bar{f} , i que el cost de cada unitat de treball és w . Determina analíticament: (1) la funció de cost fixe i de cost fixe mig, (2) la funció de cost variable i de cost variable mig, (3) la funció de cost total i de cost total mig, i (4), la funció de cost marginal. Representa gràficament cada una d'aquestes funcions. (5) Troba l'escala de producció *eficient*.

De la funció de producció deduem que $h = q^{1/\theta}$. Aquesta relació ens don el nombre d'unitats necessari per produir qualsevol nombre d'unitats del producte, q . A partir d'aquí tenim que: (1) $CF(q) = \bar{f}$ i $CFM(q) = \bar{f}/q$.

(2) $CV(q) = q^{1/\theta}w$ i $CVM(q) = q^{1/\theta}/qw = q^{(1-\theta)/\theta}w$.

(3) $CT(q) = \bar{f} + q^{1/\theta}w$, i $CTM(q) = \bar{f}/q + q^{(1-\theta)/\theta}w$.

(4) $CMg(q) = (1/\theta)q^{(1-\theta)/\theta}w$.

(5) $CTM(\bar{q}) = 0 \Leftrightarrow -\bar{f}/\bar{q}^2 + w(1-\theta)/\theta\bar{q}^{(1-2\theta)/\theta} = 0$.

3. Considera la següent tecnologia, la qual especifiquem amb els parells (q, h) (quantitat de producte, treball necessari per produir-el) que especifiquem a continuació: $(q, h) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 6), (4, 10), (5, 15), (6, 21), (7, 28), (8, 37), (9, 46), (10, 56)\}$. Determina quin tipus de rendiments presenta la funció de producció. Suposem que el cost fixe és zero, i que el cost de cada unitat de treball és 1. Determina la funció de cost variable i cost variable mig, cost total mig, i cost marginal per $q = 1, 2, \dots, 10$. Determina també la corba d'oferta a curt termini i a llarg termini de l'empresa. Representa gràficament totes les corbes anteriors.

El treball presenta rendiments decreixents: una unitat adicional de producte requereix increments a la quantitat de treball cada cop més grans.

Per cada parell (q, h) , tenim que $CV(q) = h$ i que $CVM(q) = h/q$. Com que el cost fixe és zero, aleshores els costos variables també són els costos totals. Finalment, la funció de cost marginal en aquest exercici la determinem com $CMg(q) = CT(q) - CT(q-1)$.

4. Considerem una empresa tal que el seu cost fixe és igual a 1, i que el seu cost variable és $CV(q) = (q-2)^2$. Determina algebràicament les expressions per la corba de cost total, cost total mig, cost variable mig, y cost marginal (per la corba de cost marginal pots ralitzar els teus càlculs estudiant la variació en el cost total al passar de $q = 0$ a $q = 1$, de $q = 1$ a $q = 2\dots$). Determina també la corba d'oferta, i l'escala de producció eficient.

En aquest cas tenim que

$$CT(q) = 1 + (q-2)^2, \text{ i } CTM(q) = \frac{1}{q} + \frac{(q-2)^2}{q},$$

$$CVM(q) = \frac{(q-2)^2}{q},$$

$$CMg(q) = 2(q-2).$$

L'escala de producció eficient la trobem igualant CMg al CTM :

$$1 + (q-2)^2 = 2(q-2).$$

Si definim $x = (q-2)$, aleshores l'expressió anterior diu:

$$1 + x^2 - 2x = 0,$$

la qual podem escriure com $(x-1)^2 = 0$. Aquesta equació només es pot complir si $x = 1$, la qual cosa implica que $q = 3$.

5. La Maria és la propietària d'una fàbrica de galetes. El cost de manteniment i els pagaments de la hipoteca (els costos fixos) pugen a 1 mil.lió d'euros anuals. La tecnologia de la planta permet produir galetes a un cost de q^2 euros, on q és la quantitat de galetes mesures en mil.lions de paquets.
5.1 Dibuixa en una gràfica el cost marginal (CMg), el cost total mitjà ($CTMe$), i el cost variable mitjà ($CVMe$) d'aquesta fàbrica. Indica en el gràfic la funció d'oferta a curt termini d'aquesta empresa, i determina l'escala de producció eficient d'aquesta fàbrica.

Tenim que $CT(q) = 1+q^2$, de forma que $CMg(q) = 2q$, i $CTM(q) = 1/q+q$. Finalment, $CVM(q) = q$. L'escala eficient de producció ve donada per la \bar{q} tal que el $CTM'(\bar{q}) = 0$. Això és, $\bar{q} = 1$.

5.2 Ara imaginem que la Maria pogués comprar una segona fàbrica, absolutament idèntica a l'anterior (mateixos costos fixos i mateixa tecnologia de producció). Fixem un pla de producció q , que es reparteix entre el que produiria la fàbrica 1 (q_1), i la fàbrica 2 ($q - q_1$). Quins són els costos de produir q amb dues fàbriques? Quina és la quantitat q_1 (en funció de q) que minimitzaria aquests costos? (és a dir, la derivada dels costos pel que fa a q_1 ha de ser zero).

5.3 Amb aquestes dues fàbriques, i repartint q_1 de manera que minimitzem el cost, determina per a un pla de producció q el cost mitjà i el cost marginal. Determina també l'escala de producció eficient amb dues fàbriques. Quina relació guarda amb l'escala de producció eficient quan hi havia una sola fàbrica? A partir de quin pla de producció q_{max} (o major) la Maria hauria de comprar una segona fàbrica?

Produir amb dues plantes implica pagar dos cops els costos fixos, mes els costos variables a cada una de les plantes de producció. Donat q , tenim

$$CT(q_1) = 2 + q_1^2 + (q - q_1)^2.$$

Troblem la q_1^* tal que $CT(q_1^*) \leq CT(q)$, això és,

$$CT'(q_1^*) = 0 \Leftrightarrow 2q_1 - 2(q - q_1) = 0 \Rightarrow q_1 = q/2.$$

El cost total, produint amb dues fàbriques, és

$$CT_2(q) = 2 + 2(q/2)^2.$$

Per tant, tenim que $CTM_2(q) = 2/q + 2(q/2)^2/q = 2/q + q/2$, i $CMg_2(q) = 4(q/2)(1/2) = q$. L'escala eficient de producció es $\bar{q} = 2$ (ja que amb aquesta producció el cost total mig és igual al cost marginal). Per tant, si q és més gran que 2, aleshores la Maria hauria de comprar una altra planta productiva.

5.4 Si la Maria comprés una tercera fàbrica, quina seria l'escala eficient de producció considerant que les fa servir totes tres? Quin seria el seu cost mitjà operant a aquesta escala?

Amb una tercera planta tindriem que l'escala eficient de producció és $\bar{q} = 3$. El cost total mig en aquest cas és 2.

6. A la indústria de les galetes, per a qualsevol empresa (existent o potencial) a llarg termini tenim una estructura de costos tal que els costos mitjans són $CMe(q) = 2 - 2q + q^2$, on q són els mil.lions de paquets de

galletes produïts.

6.1. Quina és l'escala eficient de producció a llarg termini? Determina la corba de costos marginals a llarg termini, i la corba d'oferta de l'empresa a llarg termini.

L'escala eficient de producció és la que minimitza el cost total mig. En aquest cas,

$$CTM'(\bar{q}) = 0 \Leftrightarrow \bar{q} = 1.$$

El cost total és $CT(q) = CTM(q) * q$. Per tant tenim que

$$CT(q) = 2q - 2q^2 + q^3.$$

També tenim que:

$$CMg(q) = CT'(q) = 2 - 4q + 3q^2.$$

Aquesta darrera expressió coincideix amb la corba d'oferta (a llarg termini la corba d'oferta és el segment de la corba de cost marginal que hi ha per sobre de la corba de cost total mig).

6.2 Suposem que la corba de demanda de galletes en el mercat és perfectament inelàstica, $q = 100$ (mil.lions de paquets). Suposem que l'entrada i sortida d'empreses és totalment flexible (no hi ha barreres). Com que el bé és homogeni, suposem que la demanda es reparteix per igual entre les empreses existents en el mercat. Quantes empreses operaran en l'equilibri d'aquest mercat? Quin serà el preu d'equilibri? Dibuixa aproximadament les corbes de demanda i d'oferta de la indústria.

Si no hi ha barreres a l'entrada totes les empreses existents produiran a l'escala eficient. Per tant, tindrem 100 empreses i cada una d'elles produirà 1 unitat. El preu d'equilibri en el mercat és 1 (igual al cost marginal de l'escala eficient de producció).

6.3 Ara suposem que la corba de demanda es desplaça a $q = 200$ i que de nou la demanda es reparteix a parts iguals entre les empreses operant en el mercat. Considera un primer instant en què mantenim les empreses que operaven en l'equilibri que has trobat a l'apartat anterior. Quins seran el preu d'equilibri i el benefici que cada empresa obtindria?

Amb barreres a l'entrada, ara cada empresa produirà 2 unitats del bé. Tenim que

$$CMg(2) = 2 - 4 \times 2 + 3 \times 2^2 = 6.$$

Tenim que a l'equilibri competitiu $p = 6$ i per tant, els beneficis són

$$B(2) = 6 \times 2 - CT(2) = 12 - (2 \times 2 - 2 \times 2^2 + 2^3) = 12 - 4 = 8$$

6.4 Considerem ara que totes les empreses que ho desitgin poden entrar en aquest mercat. A llarg termini, quin serà el preu d'equilibri? Quantes empreses tindrem? Quant produirà cada empresa? Quin benefici obtindrà cada empresa?

En aquest cas tindrem 200 empreses, cada una produint una unitat, i el preu d'equilibri és 1, de forma que els beneficis són zero.

7. Considerem un monopolista en un cert mercat, el qual té accés a la tecnologia descrita amb la següent funció de cost: $CT(q) = cq$ (c és un nombre positiu). La corba de demanda del mercat és $q = a - bp$ (a i b són nombres positius).

7.1 Determina la corba d'ingressos marginals de l'empresa. Determina la relació entre els paràmetres a , b , i c tal que el monopolista decideix produir. Amb aquestes condicions, determina la quantitat que produirà i el preu corresponent.

7.2 Determina els beneficis que obté l'empresa monopolista.

7.3 Suposem ara que el mercat anterior és perfectament competitiu: hi ha moltes empreses les quals operen la mateixa tecnologia que hem descrit abans (tampoc no hi ha variacions a la corba de demanda). Quin seria el preu d'equilibri de mercat? I la quantitat total consumida?

7.4 En relació a l'equilibri en el mercat competitiu, quina és la pèrdua irrecuperable d'eficiència provocada pel monopoli?

De la corba de demanda deduem que $p = (a - q)/b$. Per tant, l'ingrés total és $IT(q) = p(q)q$:

$$IT(q) = \frac{a - q}{b}q,$$

de forma que l'ingrés marginal és

$$IMg(q) = IT'(q) = \frac{a}{b} - \frac{2}{b}q.$$

El monopolista maximitza els beneficis quan $IMg(q^M) = CMg(q^M)$, és a dir, quan:

$$\frac{a}{b} - \frac{2}{b}q = c.$$

Reordenant l'expressió anterior tenim que

$$q^M = \frac{a - cb}{2},$$

de forma que el monopolista només prouirà si $a - cb > 0$.

Els beneficis associats a q^M són $B(q^M) = p(q^M)q^M$:

$$B(q^M) = \frac{a - q^M}{b} q^M.$$

En competència perfecta tindriem que en equilibri l'oferta és igual a la demanda:

$$c = (a - q)/b,$$

de forma que q^* satisfà $q^* = a - cb$. Noteu que en competència perfecta la quantitat d'equilibri és el doble que la del monopoli. El preu d'equilibri en aquest cas és $p^* = c$ (preu igual a cost marginal).

Finalment la pèrdua de benestar associada a la presència del monopoli és la part que no podem recuperar de l'excedent del consumidor (ja que en aquest problema l'excedent del productor competitiu és zero). Aquesta pèrdua la podem mesurar com

$$\frac{1}{2}(p^M - p^*)(q^* - q^M).$$