

Microeconomia Avançada I
Xavier Martínez-Giralt
Curs 2010-2011
Takehome 2

1. Considereu la funció d'utilitat $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$.
 - (a) Preneu la cistella (x_0, y_0) i suposeu que augmenteu el consum del be x en un 10% (tot mantenint constant el consum del be y en el nivell y_0). En quin percentatge varia el nivell d'utilitat? Proporcioneu la interpretació econòmica dels paràmetres α i β .
 - (b) Trobeu la relació entre la taxa marginal de substitució i l'elasticitat de la utilitat respecte a cada be.
 - (c) Suposeu que l'elasticitat d'una corba d'indiferència és $\varepsilon = -1$ i l'elasticitat de la utilitat respecte al be x és $\eta_x = 1/2$. Si multipliquem per quatre les quantitats d'ambdós bens, en quant variarà el nivell d'utilitat?
2. Considereu la funció d'utilitat individual $u(x, y) = kx^\alpha y^\beta$. L'individu té una renda w .
 - (a) Calculeu la funció indirecta de utilitat, la demanda marshaliana, la funció de despesa i la demanda hicksiana.
 - (b) Verificar les quatre identitats fonamentals.
 - (c) Utilitzar el lema de Shepard per obtenir la demanda hicksiana.
 - (d) Utilitzar la identitat de Roy per obtenir la demanda marshaliana.
 - (e) Trobeu l'equació de Slutsky.

ATENCIÓ: Enviar les solucions en format .pdf a xavier.martinez.giralt@uab.cat, abans del dia 9 de novembre de 2010.

Solució Takehome 2

1. $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$.

(1a) Considerem (x_0, y_0) i fixem y_0 . Per tant $u(x, y_0) = y_0^\beta x^\alpha$. Per simplificar la notació, definim $A \equiv y_0^\beta$, i escribim, $u(x) = Ax^\alpha$

Si augmenta el consum de x , la variació del nivell d'utilitat és,

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x.$$

Considerem un augment en el consum de x del 10%, és a dir, $\Delta x/x = 0.1$. Aleshores,

$$\frac{\Delta u}{x} = \frac{du}{dx} \frac{\Delta x}{x} = \alpha Ax^{\alpha-1} \frac{\Delta x}{x}.$$

És a dir,

$$\Delta u = \alpha Ax^\alpha \frac{10}{100} = \alpha u \frac{10}{100},$$

que podem expressar com,

$$\frac{\Delta u}{u} = \alpha \frac{10}{100}. \quad (1)$$

Per tant una variació en el consum del bé x del 10% genera una variació en el nivell d'utilitat de 0.1α .

Reescribim (1) com

$$\alpha = \frac{\frac{\Delta u}{u}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{x}{u} = \eta_x$$

i obtenim que α és precisament l'elasticitat de la utilitat en respecte al bé x .

Mutatis mutandis, podem demostrar que $\beta = \eta_y$.

(1b) Per definició,

$$TMS_{x,y} \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\alpha y}{\beta x} = -\frac{\eta_x y}{\eta_y x},$$

és a dir,

$$\frac{dy}{dx} \frac{x}{y} = -\frac{\eta_x}{\eta_y}. \quad (2)$$

L'expressió de l'esquerra de (2) és l'elasticitat de la corba d'indiferència, que denotem com ε . Així doncs podem reescriure (2) com,

$$\varepsilon = -\frac{\eta_x}{\eta_y}. \quad (3)$$

- (1c) Siguien $\varepsilon = -1$ i $\eta_x = 1/2$. Substituint aquests valors a (3) obtenim $\eta_y = \frac{1}{2}$. A més ja hem obtingut (vegeu secció (1a)) $\alpha = \eta_x$ i $\beta = \eta_y$, de manera que podem escriure, $u(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. Aleshores si multipliquem per quatre x i y obtenim,

$$(4x^{\frac{1}{2}})(4y^{\frac{1}{2}}) = 4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 4u,$$

és a dir el nivell d'utilitat també es multiplica per quatre. Formalment, diem que $u(x, y)$ és una funció H^1 .

2. sigui $u(x, y) = kx^\alpha y^\beta$

- (2a) Les *Demandes marshallianes* són la solució de

$$\max_{x,y} kx^\alpha y^\beta \text{ s.a } p_x x + p_y y \leq w$$

Condicions de primer ordre:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha k x^{\alpha-1} y^\beta - \lambda p_x = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \beta k x^\alpha y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = p_x x + p_y y - w = 0 \quad (6)$$

Dividint (4) entre (5) i simplificant obtenim,

$$y = \frac{\beta p_x}{\alpha p_y} x. \quad (7)$$

Substituint (7) a (6) obtenim,

$$p_x x \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) = w \quad (8)$$

Finalment resolent el sistema (7), (8) per x i y obtenim les demandes marshallianes:

$$x(p, w) = \frac{\alpha w}{p_x(\alpha + \beta)} \quad (9)$$

$$y(p, w) = \frac{\beta w}{p_y(\alpha + \beta)} \quad (10)$$

La *Funció indirecta d'utilitat* és

$$v(p, w) = k \left[\frac{\alpha w}{p_x(\alpha + \beta)} \right]^\alpha \left[\frac{\beta w}{p_y(\alpha + \beta)} \right]^\beta \quad (11)$$

Les *Demandes hicksianes* són la solució de

$$\min_{x,y} p_x x + p_y y \text{ s.a } kx^\alpha y^\beta$$

Condicions de primer ordre:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = p_x - \lambda(\alpha k x^{\alpha-1} y^\beta) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = p_y - \lambda(\beta k x^\alpha y^{\beta-1}) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = kx^\alpha y^\beta - u_0 = 0 \quad (14)$$

Dividint (12) entre (13) i simplificant obtenim,

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \frac{p_x}{p_y} x. \quad (15)$$

Substituint (15) a (14) obtenim,

$$x^{\alpha+\beta} = \frac{u_0}{k} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{p_y}{p_x} \right)^\beta$$

Per tant la *funció de demanda hicksiana* del bé x és,

$$h_x(p, u_0) = u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} k^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{p_y}{p_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \quad (16)$$

Substituint (16) a (15) obtenim la *funció de demanda hicksiana* del bé y :

$$h_y(p, u_0) = u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} k^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{p_y}{p_x} \right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} \quad (17)$$

La *funció de despesa* és

$$e(p, u_0) = p_x h_x(p, u_0) + p_y h_y(p, u_0) \quad (18)$$

Substituint (16) i (17) a (18) i simplificant, obtenim

$$e(p, u_0) = u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} k^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} p_x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha + \beta) \quad (19)$$

(2b) La *identitat 1* diu: $e(p, v(p, w)) \equiv w$. Utilitzant doncs, (11) i (19) obtenim

$$\left[k \left[\frac{\alpha w}{p_x(\alpha + \beta)} \right] \left[\frac{\beta w}{p_y(\alpha + \beta)} \right] \right]^{\frac{1}{\alpha + \beta}} k^{\frac{-1}{\alpha + \beta}} p_x^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} p_y^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha + \beta}} \beta^{\frac{-\beta}{\alpha + \beta}} (\alpha + \beta) =$$

$$k^{\frac{1}{\alpha + \beta}} k^{\frac{-1}{\alpha + \beta}} p_x^{\frac{-\alpha}{\alpha + \beta}} p_x^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} p_y^{\frac{-\beta}{\alpha + \beta}} p_y^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha + \beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \beta^{\frac{-\beta}{\alpha + \beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} w^{\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta}} (\alpha + \beta)^{-1} (\alpha + \beta) = w$$

La *identitat 2* diu: $v(p, e) \equiv u$. Utilitzant doncs, (11) i (19) obtenim

$$k \left[\frac{\alpha}{p_x(\alpha + \beta)} \right]^{\alpha} \left[\frac{\beta}{p_y(\alpha + \beta)} \right]^{\beta} \left[u_0^{\frac{1}{\alpha + \beta}} k^{\frac{-1}{\alpha + \beta}} p_x^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} p_y^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha + \beta}} \beta^{\frac{-\beta}{\alpha + \beta}} (\alpha + \beta) \right]^{(\alpha + \beta)}$$

$$k k^{-1} \alpha^{\alpha} \alpha^{-\alpha} \beta^{\beta} \beta^{-\beta} p_x^{-\alpha} p_x^{\alpha} p_y^{-\beta} p_y^{\beta} (\alpha + \beta)^{(\alpha + \beta)} (\alpha + \beta)^{-(\alpha + \beta)} u_0 = u$$

La *identitat 3* diu: $h_x(p, v) \equiv x$. Utilitzant doncs, (11) i (16) obtenim

$$\left[k \left[\frac{\alpha w}{p_x(\alpha + \beta)} \right]^{\alpha} \left[\frac{\beta w}{p_y(\alpha + \beta)} \right]^{\beta} \right]^{\frac{1}{\alpha + \beta}} k^{\frac{-1}{\alpha + \beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{p_y}{p_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} =$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \left(\frac{w}{p_x} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \left(\frac{w}{p_y} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} =$$

$$\frac{\alpha w}{p_x(\alpha + \beta)} = x(p, w)$$

La *identitat 4* diu: $x(p, e) \equiv h_x$. Utilitzant doncs, (9) i (19) obtenim

$$\frac{\alpha}{p_x(\alpha + \beta)} \left[u_0^{\frac{1}{\alpha + \beta}} k^{\frac{-1}{\alpha + \beta}} p_x^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} p_y^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha + \beta}} \beta^{\frac{-\beta}{\alpha + \beta}} (\alpha + \beta) \right] =$$

$$u_0^{\frac{1}{\alpha + \beta}} k^{\frac{-1}{\alpha + \beta}} p_x^{\frac{-\alpha}{\alpha + \beta}} p_y^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \beta^{\frac{-\beta}{\alpha + \beta}} = h_x(p, u_0)$$

(2c) El lema de Shephard diu

$$h_x(p, u_0) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_x}$$

Calculem doncs,

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_x} = u_0^{\frac{1}{\alpha + \beta}} k^{\frac{-1}{\alpha + \beta}} \alpha^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \beta^{\frac{-\beta}{\alpha + \beta}} p_x^{\frac{-\beta}{\alpha + \beta}} p_y^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} = h_x(p, u_0)$$

(2d) La identitat de Roy diu

$$x(p, w) = - \frac{\frac{\partial v}{\partial p_x}}{\frac{\partial v}{\partial w}}$$

Calculem doncs aquestes expressions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p_x} &= \alpha k \left(\frac{\alpha w}{p_x(\alpha + \beta)} \right)^{(\alpha-1)} \left(\frac{\beta w}{p_y(\alpha + \beta)} \right)^{(\beta)} \left(\frac{-\alpha w(\alpha + \beta)}{p_x^2(\alpha + \beta)^2} \right) = \\ &= -\alpha k \left(\frac{\alpha}{p_x(\alpha + \beta)} \right)^\alpha \frac{1}{p_x} \left(\frac{\beta}{p_y(\alpha + \beta)} \right)^\beta w^{(\alpha+\beta-1)}. \\ \frac{\partial v}{\partial w} &= (\alpha + \beta) k \left(\frac{\alpha}{p_x(\alpha + \beta)} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_y(\alpha + \beta)} \right)^\beta w^{(\alpha+\beta-1)}. \\ -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_x}}{\frac{\partial v}{\partial w}} &= \frac{\alpha w^{(\alpha+\beta)} w^{-(\alpha+\beta-1)}}{p_x(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha w}{p_x(\alpha + \beta)} = x(p, w) \end{aligned}$$

(2e) L'equació de Slutsky diu

$$\frac{\partial x(p, w)}{\partial p_y} = \frac{\partial h_x(p, u)}{\partial p_y} - \frac{\partial x(p, w)}{\partial w} y$$

Calculem aquestes expressions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(p, w)}{\partial p_y} &= 0 \\ \frac{\partial h_x(p, u)}{\partial p_y} &= u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} k^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{p_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{p_y} \right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} (\alpha + \beta)^{-1} \\ \frac{\partial x(p, w)}{\partial w} y &= \frac{\alpha}{p_x(\alpha + \beta)} \frac{\beta w}{p_y(\alpha + \beta)} = \text{identitat 1} \\ &= \frac{\alpha \beta}{p_x p_y (\alpha + \beta)^2} u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} k^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} p_x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha + \beta) = \\ &= u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} k^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{p_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{p_y} \right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} (\alpha + \beta)^{-1} \end{aligned}$$

Per tant,

$$\frac{\partial h_x(p, u)}{\partial p_y} = \frac{\partial x(p, w)}{\partial w} y \Rightarrow \frac{\partial x(p, w)}{\partial p_y} = 0.$$