

Microeconomia Avanzada I
Examen Parcial, Novembre 2010.

1. Considerem una funció $F(P, w)$ definida com la inversa de la funció indirecta d'utilitat:

$$F(P, w) = \frac{1}{v(P, w)}$$

on $v(P, w) \neq 0$ i satisfà totes les propietats habituals.

Obtenir la demanda marshalliana d'un bé j , a partir de la funció $F(P, w)$.

2. Donada la següent funció d'utilitat,

$$u_1(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - \alpha_i)^{\beta_i},$$

verificar que la funció

$$u_2(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \ln(x_i - \alpha_i)$$

representa les mateixes preferències.

3. La funció indirecta d'utilitat d'un consumidor és:

$$v(P, w) = \frac{w}{p_1 + bp_2}, \quad b > 0.$$

Verificar que el cocient entre la demanda marshalliana del bé 2 i la demanda marshalliana del bé 1 coincideix amb el cocient entre la demanda hicksiana del bé 2 i la demanda hicksiana del bé 1.

Solució Exàmen parcial

1. Utilitzem la identitat de Roy per determinar la demanda marshalliana del bé j :

$$x_j(P, w) = - \frac{\frac{\partial v(P, w)}{\partial p_j}}{\frac{\partial v(P, w)}{\partial w}}. \quad (1)$$

Invertint la funció $F(P, w)$ obtenim

$$v(P, w) = \frac{1}{F(P, w)} \quad (2)$$

Substituint (2) a (1) obtenim

$$x_j(P, w) = - \frac{\frac{\partial(\frac{1}{F(P, w)})}{\partial p_j}}{\frac{\partial(\frac{1}{F(P, w)})}{\partial w}}. \quad (3)$$

Calculem,

$$\frac{\partial(\frac{1}{F(P, w)})}{\partial p_j} = - \frac{\frac{\partial F(P, w)}{\partial p_j}}{(F(P, w))^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{F(P, w)})}{\partial w} = - \frac{\frac{\partial F(P, w)}{\partial w}}{(F(P, w))^2}, \quad (5)$$

Substituint (4) i (5) a (3), obtenim

$$x_j(P, w) = - \frac{\frac{\partial F(P, w)}{\partial p_j}}{\frac{\partial F(P, w)}{\partial w}}.$$

2. Considerem la funció $u_1(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - \alpha_i)^{\beta_i}$ i calculem la RMS per a dos bens k i l :

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_k} = \beta_k (x_k - \alpha_k)^{\beta_k - 1} (x_l - \alpha_l)^{\beta_l} \prod_{j \neq k, l} (x_j - \alpha_j)^{\beta_j},$$

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_l} = \beta_l (x_l - \alpha_l)^{\beta_l - 1} (x_k - \alpha_k)^{\beta_k} \prod_{j \neq k, l} (x_j - \alpha_j)^{\beta_j}.$$

Per tant,

$$RMS_{k,l} = \frac{\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_k}}{\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_l}} = \frac{\beta_k (x_l - \alpha_l)}{\beta_l (x_k - \alpha_k)}.$$

Considerem la funció $u_2(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \ln(x_i - \alpha_i)$ i calculem la RMS per a dos bens k i l :

$$\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_k} = \beta_k \frac{1}{(x_k - \alpha_k)},$$

$$\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_l} = \beta_l \frac{1}{(x_l - \alpha_l)}.$$

Per tant,

$$RMS_{k,l} = \frac{\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_k}}{\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_l}} = \frac{\beta_k (x_l - \alpha_l)}{\beta_l (x_k - \alpha_k)}.$$

3. Demandes marshallianes.

Per obtenir les demandes marshallianes utilitzem la identitat de Roy:

$$x_j(P, w) = - \frac{\frac{\partial v(P, w)}{\partial p_j}}{\frac{\partial v(P, w)}{\partial w}}, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Calculem

$$\frac{\partial v(P, w)}{\partial p_1} = - \frac{w}{(p_1 + bp_2)^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v(P, w)}{\partial p_2} = - \frac{wb}{(p_1 + bp_2)^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial v(P, w)}{\partial w} = \frac{1}{(p_1 + bp_2)} \quad (9)$$

Substituint (7) i (9) a (6) per $j = 1$ obtenim

$$x_1(P, w) = \frac{w}{(p_1 + bp_2)}. \quad (10)$$

Substituint (8) i (9) a (6) per $j = 2$ obtenim

$$x_2(P, w) = \frac{wb}{(p_1 + bp_2)}. \quad (11)$$

Finalment, el cocient entre ambdues demandes és:

$$\frac{x_2(P, w)}{x_1(P, w)} = b. \quad (12)$$

Demandes hicksianes.

Per obtenir les demandes hicksianes, calculem primer la funció de despesa a partir de les identitats:

$$w \equiv e(P, \bar{u}), \quad v(P, w) \equiv \bar{u}.$$

Aleshores,

$$v(P, w) = \frac{w}{p_1 + bp_2} \Rightarrow \bar{u} = \frac{e(P, \bar{u})}{p_1 + bp_2}$$

i per tant,

$$e(P, \bar{u}) = \bar{u}(p_1 + bp_2).$$

A continuació obtenim les demandes hicksianes aplicant el lema de Shephard:

$$h_1(P, \bar{u}) = \frac{\partial e(P, \bar{u})}{\partial p_1} = \bar{u},$$
$$h_2(P, \bar{u}) = \frac{\partial e(P, \bar{u})}{\partial p_2} = b\bar{u}.$$

Finalment, el cocient entre ambdues demandes és:

$$\frac{h_2(P, \bar{u})}{h_1(P, \bar{u})} = b.$$

Per tant,

$$\frac{x_2(P, w)}{x_1(P, w)} = \frac{h_2(P, \bar{u})}{h_1(P, \bar{u})} = b.$$