Economía Matemàtica.

Xavier Martinez-Giralt
Universitat Autònoma de Barcelona

22 d'octubre de 1998

Índex

Índex de figures

Capítol 1

Topologia.

1.1 Espais Mètrics.

Intuïtivament, un *espai mètric* és un conjunt en el que hi podem incorporar una definició de distància entre els seus elements. Necessitem doncs definir el concepte de "distància" entre dos elements del conjunt. Bàsicament, la distància (també anomenada mètrica) entre dos punts arbitraris x, y d'un cert conjunt E no buit, és un número real positiu, $d(x, y)$.

Formalment, una mètrica en E és una funció d,

$$d : E \times E \to R,$$

que satisfà les següents propietats:

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in E, & d(x, y) \geq 0 \\
\text{Per } x, y \in E, & d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\
\forall x, y \in E, & d(x, y) = d(y, x) \quad \text{(simetria)} \\
\forall x, y, z \in E, & d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad \text{(desigualtat triangular).}
\end{aligned}$$

El parell (E, d) s'anomena *espai mètric*. Naturalment, sobre el conjunt E podem definir diferents mètriques que generen diferents espais mètrics.

Un model intuïtiu natural d'espai mètric és el pla geomètric en el que es fàcil interpretar les propietats del concepte de distància. La primera ens diu que la distància entre dos punts és sempre un número real no negatiu; la segona diu que la distancia entre dos punts és zero si i només si ambdós punts coincideixen; la tercera propietat (simetria) diu que la distància entre x i y és la mateixa que la distància entre y i x; finalment, la quarta propietat diu que un costat d'un triangle mai és més llarg que la suma de les longituds dels altres dos costats. La figura 1.1 il.lustra aquesta darrera propietat.

El lema següent presenta dues desigualtats importants.

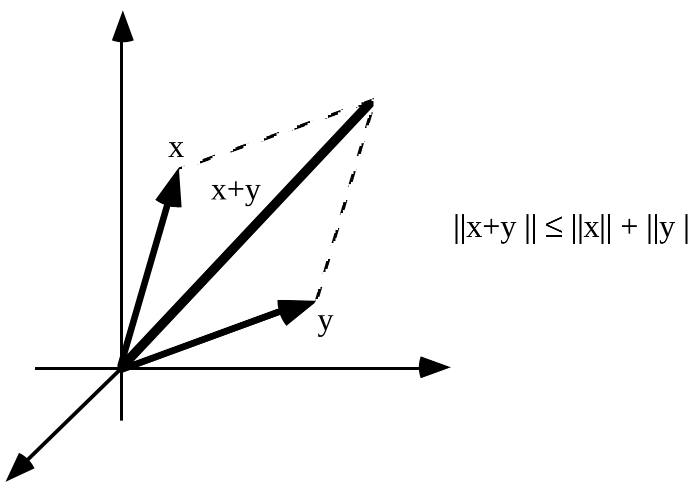


Figura 1.1: La desigualtat triangular a R^3.

Lema 1. *En un espai mètric* (E, d) *es verifica,*

$$\forall x, y, z, t \in E, |d(x, y) - d(z, t)| \leq d(x, z) + d(y, t).$$

En particular,

$$\forall x, y, z \in E, |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

Demostració. Apliquem dues vegades la desigualtat triangular,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \leq d(x, z) + d(y, t) + d(z, t).$$

A partir d'aquí,

$$d(x, y) - d(z, t) \leq d(x, z) + d(y, t). \tag{1.1}$$

De forma semblant,

$$d(z, t) \leq d(z, x) + d(t, x) \leq d(x, z) + d(y, t) + d(x, y).$$

A partir d'aquí,

$$-d(x, z) - d(y, t) \leq d(x, y) + d(z, t). \tag{1.2}$$

Combinant (1.1) i (1.2), obtenim,

$$|d(x, y) - d(z, t)| \leq d(x, z) + d(y, t).$$

□

De la mateixa manera que hem definit la distància entre dos punts, podem definir la distància entre un punt i un conjunt i la distància entre dos conjunts.

Definició 1. *(Distància entre un punt i un conjunt)*

Sigui (E, d) *un espai mètric. Considerem* $x_0 \in E$ *i* $A \subset E$*. Denotem per* $\{d(x_0, x)\}_{x \in A}$ *al conjunt de números reals format per las distàncies de* x_0 *a tots els punts de* A*. Aquest conjunt està afitat inferiorment per* 0*, de manera que admet un extrem inferior no menor que* 0*. Definim la distància de* x_0 *al conjunt* A *com aquell número real* $d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, x)\}_{x \in A}$*.*

Definició 2. *(Distància entre dos conjunts)*

Sigui (E, d) *un espai mètric. Considerem* $A, B \subset E$*,* $A, B \neq \emptyset$*. Denotem per* $\{d(x, y)\}_{x \in A, y \in B}$ *al conjunt de números reals format per totes les distàncies entre un punt de* A *i un punt de* B*. Aquest conjunt està afitat inferiorment per* 0*, de manera que admet un extrem inferior no menor que* 0*. Definim la distància entre els conjunts* A *i* B *com aquell número real* $d(A, B) = \inf\{d(x, y)\}_{x \in A, y \in B}$

Podem recordar també els conceptes de intersecció, unió i suma de conjunts.

Definició 3. *(Intersecció de conjunts.)*

Sigui (E, d) un espai mètric. Considerem $A, B \subset E$, $A, B \neq \emptyset$. La intersecció dels conjunts A i B es defineix com el conjunt de tots els punts que pertanyen tant a A com a B, i.e. $A \bigcap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

Definició 4. *(Unió de conjunts.)*

Sigui (E, d) un espai mètric. Considerem $A, B \subset E$, $A, B \neq \emptyset$. L'unió dels conjunts A i B es defineix com el conjunt de tots els punts que pertanyen a A o a B o a ambdós conjunts, i.e. $A \bigcup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

Definició 5. *(Suma de conjunts.)*

Sigui (E, d) un espai mètric. Considerem $A, B \subset E$, $A, B \neq \emptyset$. La suma dels conjunts A i B es defineix com el conjunt S de tots els punts $s = a + b$ que poden formar-se sumant qualsevol punt $a \in A$ amb qualsevol punt $b \in B$.

La figura 1.2 il.lustra la suma de conjunts.

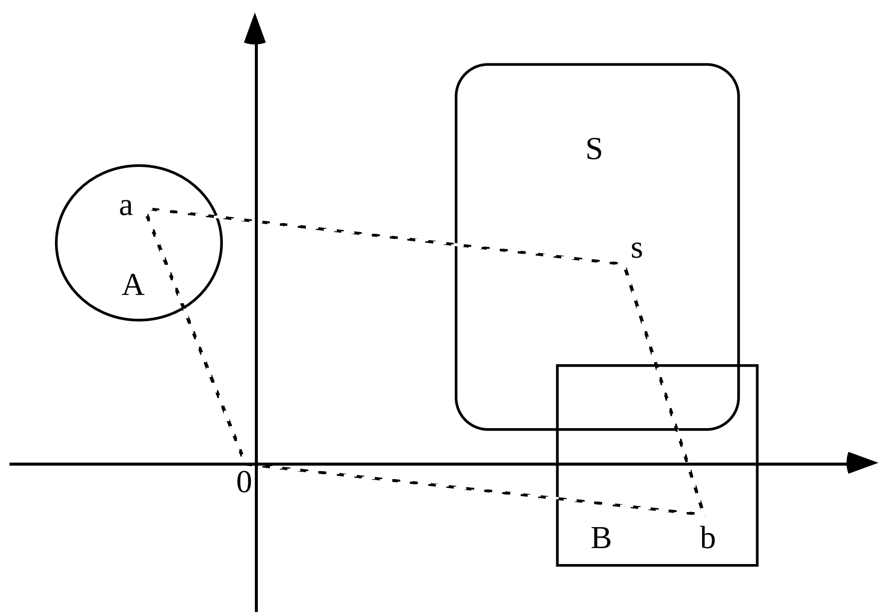


Figura 1.2: La suma de conjunts.

1.2 Espais Euclidis.

L'espai euclidi és un cas particular d'espai mètric descrit pel parell (R^n, d).

- Considerem el conjunt R^n. Siguin $x = (x_i) \in R^n$, $y = (y_i) \in R^n$ dos punts arbitraris a R^n; sigui α un número real. Definim les operacions vectorials següents,

$$x + y = (x_i + y_i) \qquad \text{(suma)} \tag{1.3}$$
$$\alpha x = (\alpha x_i) \qquad \text{(producte escalar)} \tag{1.4}$$
$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{(producte interior)} \tag{1.5}$$
$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(norma euclídea)} \tag{1.6}$$

La figura 1.3 il.lustra la suma de vectors i el producte escalar.

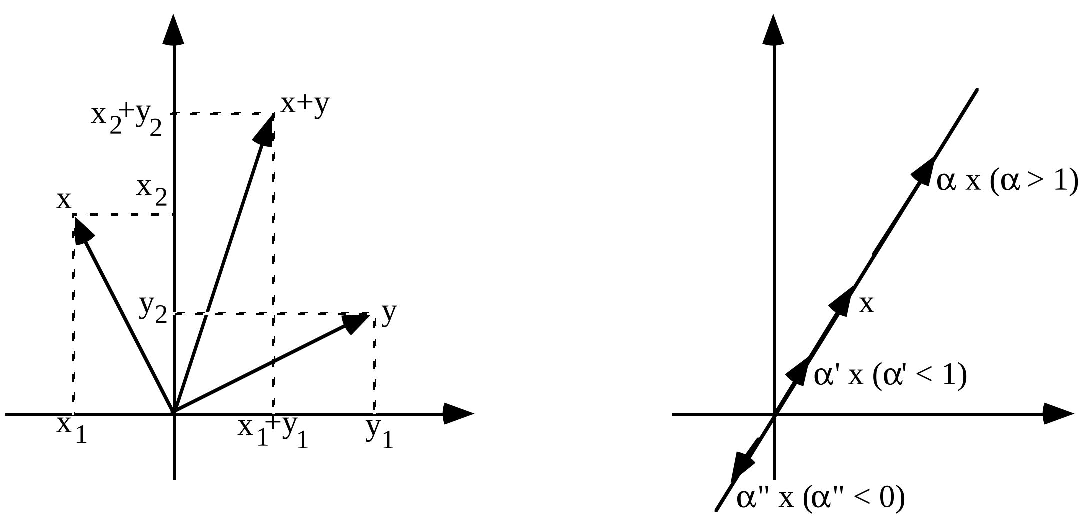


Figura 1.3: La suma i el producte escalar.

Intuïtivament, podem interpretar la norma euclídea de $x \in R^n$ com la longitud del vector x (pensem, en particular en els vectors del pla o de l'espai). A partir de (1.5) i (1.6), veiem que $\|x\|^2 =< x, x >$.

Una relació important entre el producte intern i la norma euclídea és la *desigualtat de Cauchy-Schwarz*:

$$\forall x, y \in R^n, | < x, y > | \leq \|x\|\|y\|,$$

Si els vectors x i y són linealment independents, la relació anterior es satisfà amb igualtat.

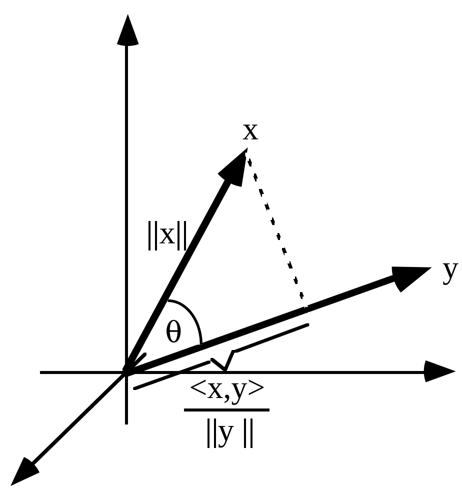
Aquesta desigualtat es deriva de les propietats del producte intern:

$$\begin{aligned}
&\forall x, y_1, y_2 \in R^n, < x, y_1 + y_2 > =< x, y_1 > + < x, y_2 >,\\
&\forall x, y \in R^n, \forall \alpha \in R, < x, \alpha y > = \alpha < x, y >,\\
&\forall x, y \in R^n, < x, y > =< y, x >,\\
&\forall x \in R^n, < x, x > \geq 0 \text{ i } < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

La norma euclídea satisfà,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in R^n, \|x\| \leq 0, \quad \text{and} = 0 \Leftrightarrow x = 0,\\
&\forall x \in R^n, \forall \alpha \in R, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,\\
&\forall x, y \in R^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \text{ (desigualtat triangular)}.
\end{aligned}$$

La figura 1.4 il.lustra la norma i el producte interior. Per interpretar-la, hem de recordar que una expressió alternativa pel producte interior a $\Re^3$ és $< x, y >= \|x\| \|y\| \cos\theta$.



.

Figura 1.4: La norma i el producte interior a R^3.

- La distància euclídea es defineix com,

$$\forall x, y \in R^n, d(x, y) = \|x - y\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

1.3 Conjunts oberts.

Definim els següents conjunts abans de definir un conjunt obert:

Definició 6. *(Bola oberta).*
Sigui $x \in R^n$ *i* $r > 0$*. Una* bola oberta de centre x i radi r *és el conjunt:*

$$B(x;r) = \{y \in R^n | d(x,y) < r\}$$

Definició 7. *(Conjunt obert). Diem que un conjunt* $A \subset R^n$ *és obert si* $\forall x \in A, \exists r > 0$ *tal que* $B(x,r) \subset A$*.*

Notem que r depèn en general de x.

Definició 8. *(Bola tancada).*
Sigui $x \in R^n$ *i* $r > 0$*. Una* bola tancada de centre x i radi r *és el conjunt:*

$$\overline{B}(x;r) = \{y \in R^n | d(x,y) \leq r\}$$

Definició 9. *(Punt interior).*
Sigui $A \subset R^n$*. Diem que* $x \in A$ *és un punt interior de* A *si* $\exists r > 0$ *tal que,*

$$B(x,r) \subset A.$$

A més, el conjunt,

$$int(A) = \{x \in A | x \text{ és un punt interior de} A\}$$

s'anomena interior del conjunt A.

A partir de la definició és trivial observar que $int(A) \subset A$.

Definició 10. *(Conjunt obert).*
Diem que el conjunt A *és obert si* $A = int(A)$*, és a dir si tot punt és interior.*

Teorema 1. *Tota esfera oberta és un conjunt obert.*

Teorema 2. *(i) L'unió d'un número arbitrari de conjunts oberts és un conjunt obert.*

(ii) La intersecció d'un número finit de conjunts oberts és un conjunt obert.

Es important notar la diferència entre ambdues afirmacions del teorema 2. Per il.lustrar la diferència, pensem que no és cert que la intersecció d'un número arbitrari de conjunts oberts és obert. Per exemple, a R^1, un punt (que no és un conjunt obert) és la intersecció de tots els intervals oberts que el contenen.

1.4 Punts d'acumulació.

La idea de punt d'acumulació és un punt al voltant del que es concentren els punts del conjunt, de forma que per petit que sigui l'entorn sempre els hi trobem. Formalment,

Definició 11. *(Punt d'acumulació).*
Sigui $A \subset R^n$ i $x \in R^n$. Diem que x és un punt d'acumulació del conjunt A, si tot entorn de x conté punts de A diferents de x, és a dir,

$$(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

en altres paraules, un punt d'acumulació d'un conjunt A és un punt tal que hi ha altres punts de A arbitràriament propers.

Al conjunt de tots el punts d'acumulació de A el denotem per $A^{'}$. Per il.lustrar el concepte de punt d'acumulació, notem que (a) un conjunt amb un punt a $\Re$ no te punts d'acumulació i (b) un conjunt com $(0,1)$ te tots el punts d'acumulació de $[0,1]$ com punts d'acumulació. Aquesta darrer exemple permet notar que un punt d'acumulació d'un conjunt pot no pertànyer al conjunt.

Definició 12. *(Punt aïllat).*
Sigui $A \subset R^n$. Si $x \in A$ però no és punt d'acumulació de A, diem que x és un punt aïllat. En altres paraules, si x és un punt aïllat vol dir que podem trobar algun entorn de x que no conté punts de A apart d'ell mateix.

1.5 Conjunts tancats.

Definició 13. *(Conjunt tancat).*
Sigui $A \subset R^n$. Diem que A és un conjunt tancat si conté tots els seus punts d'acumulació, i.e., $A' \subset A$.

Es important fer notar que NO hem definit conjunt tancat com aquell que no és obert (veure però el teorema 4 més endavant). I això és important perquè la definició de conjunt tancat admet la possibilitat tant de tenir conjunts tancats i oberts a la vegada, com de tenir conjunts que no son ni oberts ni tancats.

Definició 14. *(Clausura, Punts d'adherència.)*
Sigui $A \subset R^n$. Al conjunt resultant de la intersecció de tots els conjunts tancats que contenen A l'anomenem clausura de A i el denotem per $cl(A)$. Alternativament, $cl(A)$ consisteix en l'unió del conjunt A amb els seus punts d'acumulació, $cl(A) = A \cup A^{'}$. Els elements del conjunt $cl(A)$ s'anomenen punts d'adherència de A.

Teorema 3. *Per un conjunt A de clausura no buida, les següents propietats són equivalents:*

(i) $x \in cl(A)$,

(ii) $d(x, A) = 0$,

(iii) Per tot entorn S *de* x, $S \cap A \neq \emptyset$.

Teorema 4. *Sigui* $A \subset R^n$, *és tancat (obert) si i només si el seu complement,* $R^n \setminus A$ *és obert (tancat).*

Aquest teorema permet fer una caracterització de conjunts tancats en termes d'oberts que pot utilitzar-se com definició de tancat.

Teorema 5. *(i) L'unió d'un número finit de conjunts tancats és un conjunt tancat.*

(ii) La intersecció d'una família qualsevol de conjunts tancats és un conjunt tancat.

Corolari 1. *Siguin* $A, B \subset R^n$. *Aleshores,*

- A *obert i* B *tancat* $\Rightarrow A \setminus B$ *obert,*
- A *tancat i* B *obert* $\Rightarrow A \setminus B$ *tancat.*

Teorema 6. *Tota esfera tancada, i tota superfície esfèrica és un conjunt tancat.*

1.6 Frontera d'un conjunt.

Definició 15. *Sigui* $A \subset R^n$. *La frontera del conjunt* A *és el conjunt*

$$\partial A = cl(A) \cap cl(R^n \setminus A).$$

Intuïtivament, la frontera d'un conjunt és el conjunt de punts en comú entre aquest conjunt i el seu complementari.

Una definició alternativa ens diu que un punt x és frontera d'un conjunt A si podem trobar una bola $B(x, d)$, amb d arbitràriament petit, que conté punts que no pertanyen a A. La figura 1.5 il.lustra aquesta definició.

Aquesta definició permet obtenir una definició alternativa de conjunt tancat com aquell que conté tots els seus punts frontera. També permet definit un punt interior d'un conjunt com aquell que pertanyent al conjunt no pertany a la seva frontera.

1.7 Seqüències.

Definició 16. *(Convergència.)*

Sigui x_k *una seqüència de punts a* R^n. *Diem que* x_k *convergeix a un límit* $x \in R^n$ *si per qualsevol entorn* U *del punt* x, *hi ha un número sencer* N *(que depèn de* U*) tal que* $x_k \in U$ *quan* $k \geq N$.

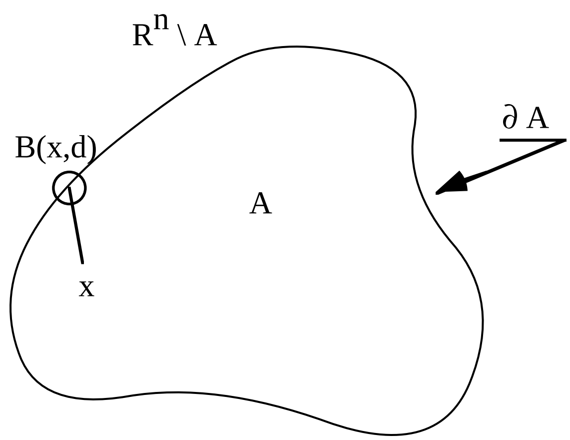


Figura 1.5: La frontera del conjunt A.

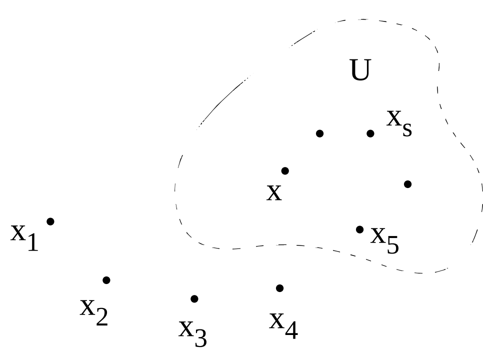


Figura 1.6: Convergència a R^n.

La figura 1.6 il.lustra aquesta definició.

Teorema 7. *Una seqüència $x_k \in R^n$ convergeix vers $x \in R^n$ si i solament si per cada $\varepsilon > 0, \exists N$ tal que $k \geq N$ implica $\|x - x_k\| < \varepsilon$.*

Teorema 8. *$x_k \to x$ ssi els components de x_k convergeixen vers els components de x com seqüències de números reals.*

Poem també utilitzar les seqüències per determinar si un conjunt és tancat:

Teorema 9. *(a) Un conjunt $A \subset R^n$ és tancat ssi per cada seqüència $x_k \in A$ convergent, el límit es troba a A.*

(b) Sigui $B \subset R^n$. $x \in cl(B)$ ssi existeix una seqüència $x_k \in B$ amb $x_k \to x$.

Definició 17. *(Seqüència de Cauchy).*
Una seqüència $x_k \in R^n$ s'anomena seqüència de Cauchy si per cada $\varepsilon > 0$, hi ha un N tal que, $l, k \geq N$ implica $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$.

Teorema 10. *Una seqüència $x_k \in R^n$ convergeix a un punt a R^n ssi és una seqüència de Cauchy.*

Aquest és un resultat important perquè permet obtenir un test de convergència donat que la condició de Cauchy no involucra el punt límit explícitament.

Exercicis

1. Analitzar exemples 1 a 6 d'espais mètrics de Iribarren pp. 17-24.

2. Sigui E un conjunt no buit, i $d : E \times E \to \Re$ una funció que satisfà les propietats següents:

   - $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ per $x, y \in E$.
   - $\forall x, y, z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

   Demostrar que d és una mètrica sobre E.

3. Demostrar les propietats de la distància, el producte intern i la norma.

4. Demostrar els teoremes 1 i 2 sobre conjunts oberts.

5. Trobar els punts d'acumulació i els punts aïllats del conjunt

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}.$$

6. Demostrar que per qualsevol interval tancat A de més d'un punt en la recta real, $A' = A$. Demostrar-ho també per tota la recta real.

7. Demostrar els teoremes 3, 4, 5 i 6 sobre conjunts tancats.

8. Caracteritzar la clausura d'un conjunt A com la intersecció de tots els conjunts tancats que contenen a A.

9. Demostrar els teoremes 7, 8, 9 i 10 sobre convergència.

Capítol 2

Conjunts Compactes i Connexes.

L'estudi dels conjunts compactes i connexes és fonamental per l'estudi de la continuïtat de funcions. La idea intuïtiva de les definicions de conjunt compacte i connex és senzilla. Diem que un conjunt a R^n és compacte quan és tancat i està contingut en una regió afitada. Diem que un conjunt a R^n és connex quan és d'una peça. Aquestes intuïcions es recullen a la figura 2.1.

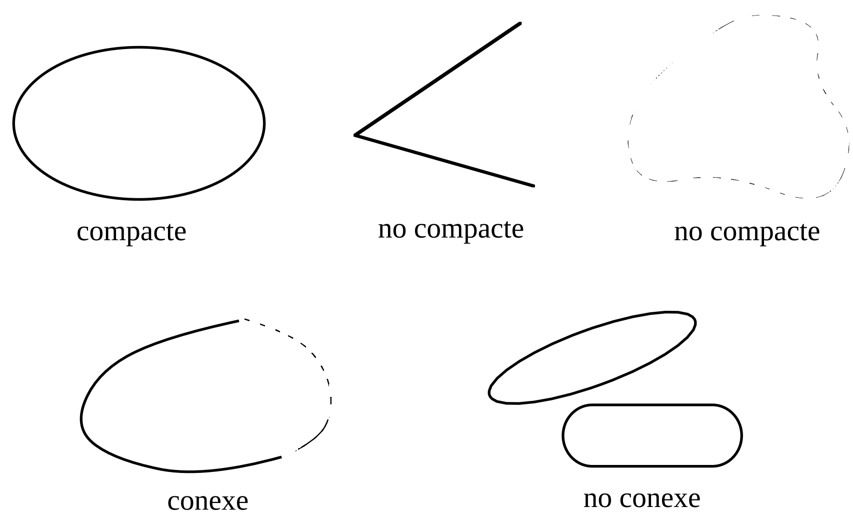


Figura 2.1: Conjunts compactes i connexes.

2.1 Conjunts compactes.

Definició 18. *(Conjunt afitat.)*

Diem que $A \subset R^n$ *és afitat ssi existeix un constant* $M \geq 0$ *que permet definir una bola al voltant de l'origen,* $B(0, M)$ *que conté al conjunt* A*, i.e.* $A \subset B(0, M)$*. De forma equivalent,* $\forall x \in A, \|x\| < M$.

En altres paraules, diem que un conjunt de punts està afitat si podem construir un conjunt que contingui tots els seus punts.

Definició 19. *(Recobriment d'un conjunt.)*
El recobriment d'un conjunt $A \subset R^n$ és una col.lecció de conjunts $\{U_i\}$ tal que la seva unió conté a A, i.e.

$$A \subset \bigcup_i U_i.$$

Quan tots els conjunts U_i són oberts diem que el recobriment és obert.
Un subrecobriment d'un recobriment donat és una subcol.lecció de conjunts tal que la seva unió també conté a A. El subrecobriment és finit si la subcol.lecció conté un número finit de conjunts.

Per exemple, el conjunt de boles $\{B[(x,0),1] | x \in R\}$ a R^2 cobreix la recta real, i la subfamília de tots els conjunts $B[(n,0),1]$ on $n \in N \subset R$, formen un subrecobriment (veure la figura 2.2).

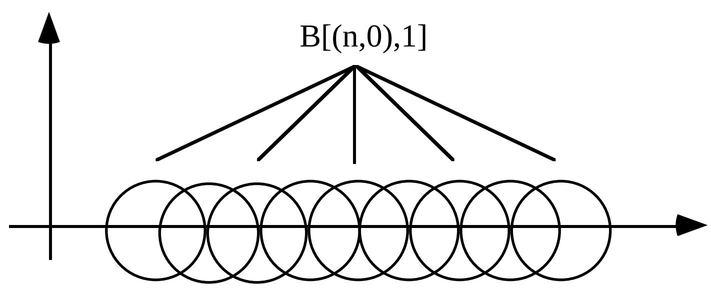


Figura 2.2: Subrecobriment de la recta real.

Teorema 11. *Sigui $A \subset R^n$. Les següents condicions són equivalents:*

(i) A és tancat i afitat;

(ii) Tot recobriment obert de A te un subrecobriment finit;

(iii) Tota seqüència en A te una subseqüència que convergeix a un punt de A.

L'equivalència entre (i) i (ii) es coneix com el teorema de Heine-Borel. L'equivalència entre (i) i (iii) es coneix com el teorema de Bolzano-Weierstrass.

Definició 20. *(Conjunt compacte.)*
Un conjunt $A \subset R^n$ que satisfaci una (i per tant totes) de les condicions del teorema11 s'anomena compacte.

Teorema 12. *(i) L'unió, la intersecció i la suma d'un número finit de conjunts afitats és un conjunt afitat.*

(ii) L'unió, la intersecció i la suma d'un número finit de conjunts compactes és un conjunt compacte.

2.2 Conjunts connexes.

Definició 21. *(Conjunt connex.)*
Diem que un conjunt $A \subset R^n$ *és connex si NO existeixen dos conjunts oberts* $U, V, \neq \emptyset$ *tal que*

$$\begin{aligned} &A \subset U \cup V, \\ &A \cap U \neq \emptyset, \\ &A \cap V \neq \emptyset, \\ &A \cap U \cap V = \emptyset. \end{aligned}$$

Intuïtivament, la idea de conectivitat es que el conjunt A no es pugui separar en dues peces. Quan podem trobar dos conjunts U i V que separen al conjunt A en dues peces disjuntes, diem que A no es connex (veure figura 2.1).

Exercicis

1. Exemples 1,2,3,4,5,6 sobre compactes Marsden pp.63-64.
2. Demostrar el teorema 11 (Marsden pp.70-72).

Capítol 3

Funcions contínues.

3.1 Continuïtat.

La idea intuïtiva de continuïtat es mostra en la figura 3.1. Una funció és contínua quan dos punts arbitràriament propers en el domini de la funció, x i x_0 tenen imatges arbitràriament properes en el seu recorregut $f(x)$ i $f(x_0)$.

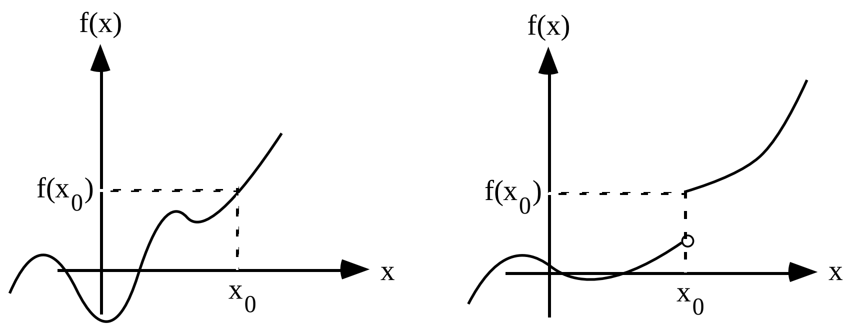


Figura 3.1: Funcions contínues i discontinues.

Per definir la continuïtat d'una funció de forma rigorosa, abans hem d'introduir el concepte de límit d'una funció en un punt.

Definició 22. *(Límit d'una funció en un punt.)*

Sigui $A \subset R^n$, $f : A \to R^m$, i suposem que x_0 és un punt d'acumulació de A. Diem que $b \in R^m$ és el límit de f en el punt x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b,$$

si donat un $\varepsilon > 0$ arbitrari, existeix $\delta > 0$ (depenent de f, x_0 i ε) tal que $\forall x \in A, x \neq x_0, \|x - x_0\| < \delta$ implica $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Aquesta definició diu que conforme x s'aproxima a x_0, $f(x)$ s'aproxima a b. Es important senyalar que si x_0 no fos un punt d'acumulació, no hi hauria cap

$x \neq x_0,\ x \in A$ proper a x_0, i la definició quedaria buida de contingut. De la definició anterior, es segueix que si be pot passar que el límit d'una funció f en un punt no existeixi, quan aquest existeix, és únic.

Definició 23. *(Continuïtat d'una funció en un punt.)*
Sigui $A \subset R^n,\ f : A \to R^m$, i sigui $x_0 \in A$. Diem que f és contínua en el punt x_0, si o be x_0 NO es un punt d'acumulació de A (i.e. si és un punt aïllat), o be $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Alternativament, diem que f és contínua en el punt x_0 del seu domini ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in A, \|x - x_0\|$ implica $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Aquesta definició suggereix dos comentaris. La primera formulació requereix l'existència de $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a més d'especificar el seu valor. La segona formulació és una mica diferent de la definició 22 perquè en aquella necessitàvem especificar que $x \neq x_0$ donat que no teníem garantit que f estigués definida en x_0. Ara en canvi, no fa falta especificar $x \neq x_0$ perquè la condició també es vàlida quan $x = x_0$.

Definició 24. *(Continuïtat d'una funció sobre un conjunt.)*
Diem que una funció $f : A \to R^m$ és contínua en el conjunt $B \subset A$ si f és contínua en cada punt de B. Si solament diem que f és contínua, volem dir que f és contínua en el seu domini A.

Teorema 13. *Sigui $f : A \to R^m$, on $A \subset R^n$ és un conjunt arbitrari. Aleshores, les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *f és contínua en A.*

(ii) *Per cada seqüència convergent $x_k \to x_0$ en A, $f(x_k) \to f(x_0)$.*

(iii) *Per cada conjunt obert $U \subset R^m,\ f^{-1}(U) \subset A$ és obert en respecte a A; és a dir, $f^{-1}(U) = V \bigcap A$ per algun conjunt obert V.*

(iv) *Per cada conjunt tancat $F \subset R^m,\ f^{-1}(F) \subset A$ és tancat en respecte a A; és a dir, $f^{-1}(F) = G \bigcap A$ per algun conjunt tancat G.*

Tindria que ser clar que (i) és el mateix que (ii) perquè (i) diu que $f(x)$ és proper a $f(x_0)$ si x és proper a x_0, i (ii) diu el mateix excepte que l'aproximació de x vers x_0 es fa mitjançant una seqüència. Les afirmacions (iii) i (iv) també diuen el mateix si recordem que un conjunt obert és el complement d'un conjunt tancat. Finalment, l'equivalència entre (i) i (iii) la podem veure amb el següent argument: (iii) ens diu que escollim un conjunt obert U que contingui a $f(x_0)$. Donat que $f^{-1}(U)$ és obert vol dir que podem trobar una bola centrada en x_0 continguda en $f^{-1}(U)$. Punts x en aquesta bola, els podem projectar en el conjunt U que, recordem, representa punts propers a $f(x_0)$. Així doncs, podem utilitzar U con una mesura de proximitat de $f(x)$ a $f(x_0)$. Si x és prou proper a x_0 (i.e. $x \in f^{-1}(U)$), $f(x)$ estarà proper a $f(x_0)$, el que representa la mateixa idea que (i).

La figura3.2 il.lustra l'afirmació (iii).

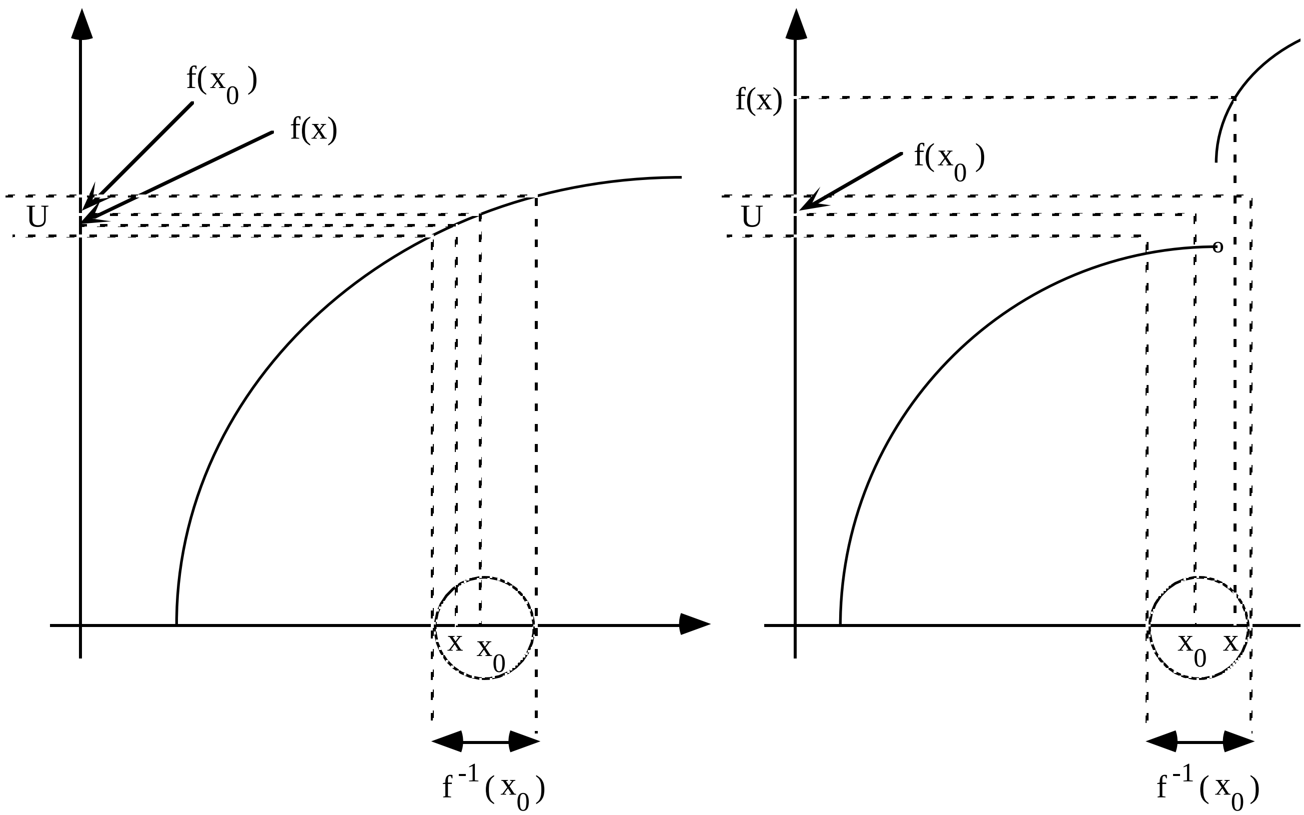


Figura 3.2: Continuïtat.

3.2 Operacions amb funcions contínues.

Definició 25. *(Composició de funcions.)*
Siguin $f : A \to R^m$ i $g : B \to R^p$ dues funcions amb $f(A) \subset B$. La composició de la funció g amb la funció f, $g \circ f : A \to R^p$ la definim per $x \mapsto g(f(x))$.

Si x és proper a x_0, aleshores $g \circ f(x)$ és proper a $g \circ f(x_0)$ perquè $f(x)$ és proper a $f(x_0)$; per tant, $g(f(x))$ és proper a $g(f(x_0))$. La figura 3.3 il.lustra aquest argument.

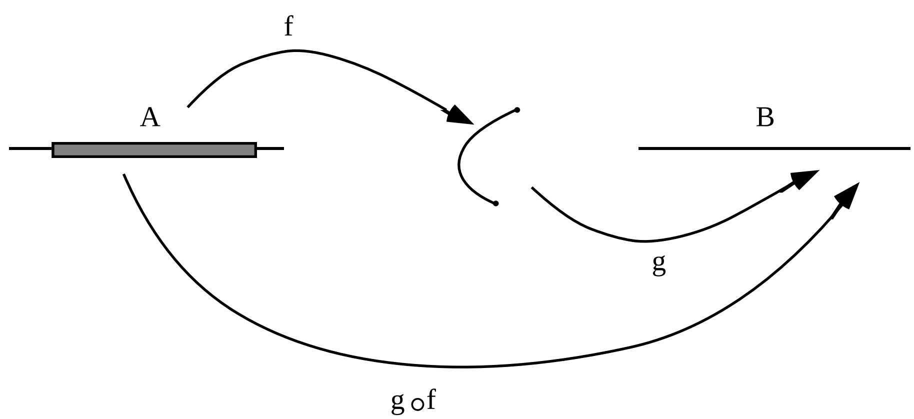


Figura 3.3: Composició de funcions.

Teorema 14. *Siguin $f : A \to R^m$ i $g : B \to R^p$ dues funcions contínues amb $f(A) \subset B$. Aleshores, $g \circ f : A \to R^p$ és contínua.*

Veiem ara algunes de les propietats fonamentals de l'aritmètica dels límits:

Teorema 15. *Sigui $A \subset R^n$, i sigui x_0 un punt d'acumulació de A.*

(i) Siguin $f : A \to R^m$ i $g : A \to R^m$ dues funcions; suposem $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$. Aleshores, $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = a + b$, on $f + g : A \to R^m$ es defineix com $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

(ii) *Siguin* $f : A \to R^m$ *i* $g : A \to R^m$ *dues funcions; suposem* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ *i* $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$*. Aleshores,* $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = ab$*, on* $f\cdot g : A \to R^m$ *es defineix com* $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$*.*

(iii) *Siguin* $f : A \to R^m$ *i* $g : A \to R^m$ *dues funcions; suposem* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$ *i* $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$*. Aleshores,* f *no és zero en un entorn de* x_0 *i* $\lim_{x\to x_0}(g/f)(x) = b/a$*, on* $g/f : A \to R^m$ *es defineix com* $(g/f)(x) = g(x)/f(x)$*.*

A partir d'aquest teorema podem deduir les propietats de l'aritmètica de les funcions contínues:

Teorema 16. *Sigui* $A \subset R^n$*, i sigui* x_0 *un punt d'acumulació de* A*.*

(i) *Siguin* $f : A \to R^m$ *i* $g : A \to R^m$ *dues funcions contínues en el punt* x_0*. Aleshores, la suma* $f + g : A \to R^m$ *és contínua en el punt* x_0*.*

(ii) *Siguin* $f : A \to R^m$ *i* $g : A \to R^m$ *dues funcions contínues en el punt* x_0*. Aleshores, el producte* $f \cdot g : A \to R^m$ *és continu en el punt* x_0*.*

(iii) *Siguin* $f : A \to R^m$ *i* $g : A \to R^m$ *dues funcions contínues en el punt* x_0 *i* $f(x_0) \neq 0$*. Aleshores,* f *no és zero en un entorn* U *de* x_0 *i el cocient* $g/f : U \to R^m$ *és continu en el punt* x_0*.*

3.3 Afitament de funcions contínues sobre conjunts compactes.

Aquesta secció està dedicada a l'anàlisi d'un teorema molt important que diu que un funció contínua definida en un conjunt compacte està afitada i assoleix el seu valor màxim i el seu valor mínim en algun punt d'aquest compacte.

Per entendre millor aquest resultat pensem en una funció definida sobre un conjunt no compacte. Per exemple la funció $f(x) = 1/x$ en l'interval $(0, 1)$ (veure figura 3.4). Conforme x s'aproxima a zero, la funció pren valors arbitràriament grans però f és contínua.

El següent exemple considera una funció afitada i contínua però sense màxim en el seu domini. Aquest és el cas de la funció $f(x) = x$ definida en el interval $[0, 1)$ (veure figura 3.4).

Aquests exemples serveixen per il.lustrar el contingut del següent teorema que diu que una funció contínua definida en un compacte no pot presentar aquestes anomalies.

Teorema 17. *Sigui* $A \subset R^n$*,* $f : A \to R$*. Sigui* $K \subset A$ *un conjunt compacte. Aleshores,* f *està afitada en* K*, i.e. el conjunt* $B = \{f(x)|x \in K\} \subset R$ *és un conjunt compacte. A més, existeixen punts* $x_0, x_1 \in K$ *tal que* $f(x_0) = inf(B)$ *i* $f(x_1) = sup(B)$*. Denominem* $sup(B)$ *el màxim valor de* f *definida sobre* K *i* $inf(B)$ *el mínim valor de* f *definida sobre* K*.*

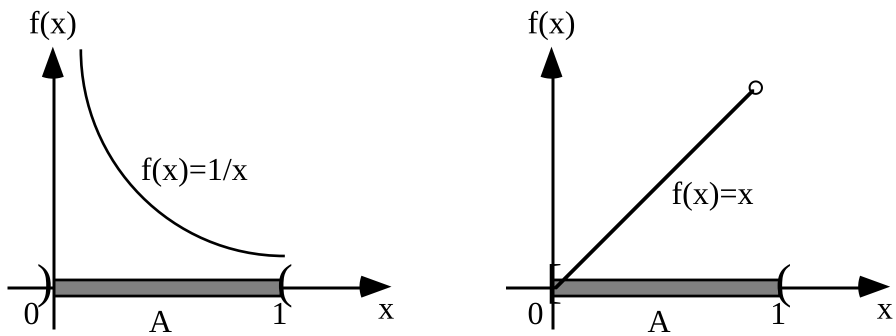


Figura 3.4: Una funció contínua definida sobre un conjunt no afitat.

3.4 El teorema del valor intermig.

La idea bàsica del teorema del valor intermig és que una funció contínua definida sobre un conjunt connex pren tots els valors entre dos punts donats. La figura 3.5 il.lustra aquest resultat.

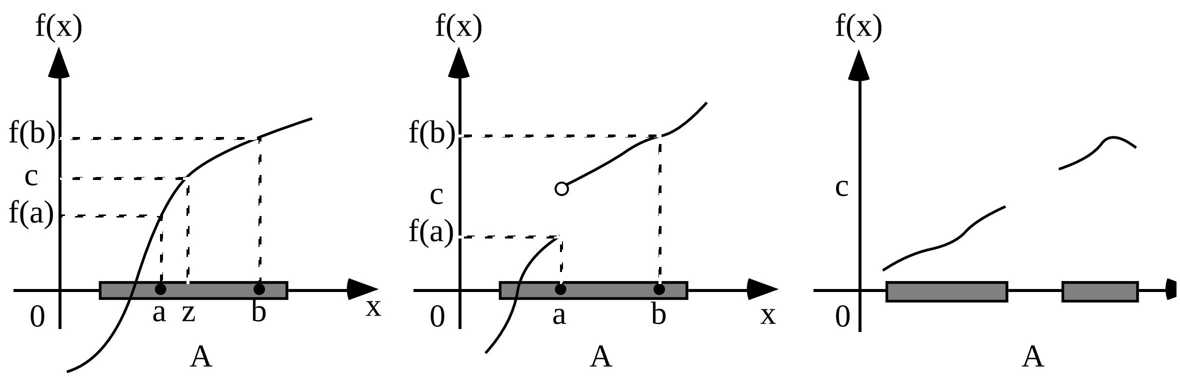


Figura 3.5: El teorema del valor intermig.

Observem que tant la continuïtat de la funció com la conectivitat del domini són supòsits essencials per poder assolir el resultat (veure la figura 3.5). En particular, si la funció es discontínua en el punt a, mai pren el valor $f(a) = c$; també si f està definida en un conjunt no connex, aleshores el punt c no te antimatge en el conjunt A.

Teorema 18. *Sigui* $\subset R^n$ *i* $f : A \to R$ *una funció contínua. Suposem* $K \subset A$ *és un conjunt connex i* $a, b \in K$. *Aleshores, per qualsevol número* $c \in R$ *tal que* $f(a) \leq c \leq f(b)$, *podem trobar un punt* $z \in K$ *tal que* $f(z) = c$.

Exercicis

1. Exemples 1,2,3 sobre funcions contínues Marsden pp.85-86.

2. Exemples 2,3 sobre funcions contínues Marsden p.88.

3. Demostrar el teorema del valor intermig (Marsden p.96)

Capítol 4

Funcions diferenciables.

4.1 Definició de derivada

Definició 26. *(Derivada d'una funció.)*

Una funció $f : A \subset R^n \to R^m$ és diferenciable en un punt $x_0 \in A$ si podem trobar una funció lineal, $Df(x_0) : R^n \to R^m$ (que denominem la derivada de f en el punt x_0) tal que,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - [f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)]\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Si f és diferenciable en tots el punts de A, diem que f és diferenciable en A.

Intuïtivament, $x \mapsto f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$ representa la millor aproximació afí a la funció f al voltant del punt x_0. La figura 4.1 il.lustra les equacions dels plans tangents a la funció f.

Si A és un conjunt obert, aleshores la millor aproximació afí a la funció f és única.

Teorema 19. *Sigui A un conjunt obert a R^n i suposem $f : A \to R^m$ és diferenciable en el punt x_0. Aleshores, $Df(x_0)$ està unívocament determinat per f.*

Recordem, ara dos resultats sobre derivades de funcions d'una variable:

Teorema 20. *Si $f : (a, b) \to \Re$ és diferenciable en un punt $c \in (a, b)$ i f presenta un màxim o un mímin en el punt c, aleshores, $f^{'}(c) = 0$.*

Teorema 21. *Si $f : [a, b] \to \Re$ és contínua, si f és diferenciable en (a, b) i si $f(a) = f(b)$, aleshores existeix un punt $c \in (a, b)$ tal que $f^{'}(c) = 0'$.*

4.2 Representació matricial.

Una forma alternativa de diferenciar una funció de varies variables consisteix en construir la matriu jacobiana de derivades parcials.

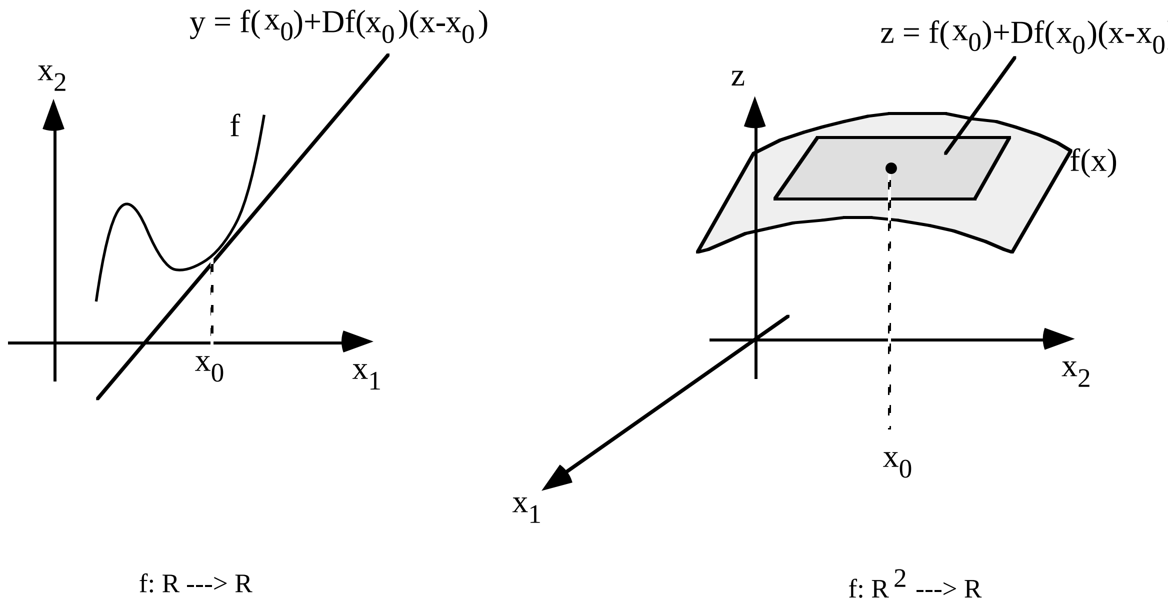


Figura 4.1: Diferenciabilitat.

Escrivim la funció f explícitament en els seus components,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

a continuació calculem les derivades parcials, $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ on $j = 1, \ldots, m$ i $i = 1, \ldots, n$.

Definició 27. *(Derivada parcial.)*
$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ *ve donada pel límit següent,*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f_j(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}.$$

Teorema 22. *Sigui $A \subset R^n$ un conjunt obert i $f : A \to R^m$ una funció diferenciable. Aleshores, les derivades parcials $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ existeixen, i la matriu de la funció lineal $Df(x)$ ve donada per*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

on cada derivada parcial està avaluada a $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Aquesta matriu s'anomena Matriu Jacobiana de f.

Definició 28. *(Gradient de la funció f.)*

Sigui $f : A \subset R^n \to R$ una funció diferenciable. El vector que te com components els mateixos elements $Df(x)$ s'anomena gradient de la funció f, i el denotem per $\bigtriangledown f$, és a dir.

$$\bigtriangledown f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

El gradient te la propietat d'apuntar en la direcció de màxim creixement de la funció f.

4.3 Continuïtat i diferenciabilitat.

Recordem del càlcul elemental que una funció diferenciable és contínua. Això es força intuïtiu perquè poder dibuixar una tangent a cada punt de la funció és una condició més forta que no tenir "que aixecar el bolígraf per dibuixar la funció". Aquesta idea es pot generalitzar.

Teorema 23. *(Propietat de Lipschitz).*

Sigui $A \subset R^n$ un conjunt obert i $f : A \to R^m$ una funció diferenciable en A. Aleshores, f és contínua. De fet, per cada $x_0 \in A$ existeix una constant $M > 0$ i un número $\delta_0 > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta_0$ implica $\|f(x) - f(x_0)\| \leq M\|x - x_0\|$.

4.4 Derivades direccionals.

La matriu jacobiana representa un mètode efectiu per computar Df, basat en les derivades parcials. Necessitem però estar segurs que l'existència de les derivades parcials implica l'existència de Df. En general això no és veritat.

Teorema 24. *Sigui $A \subset R^n$ un conjunt obert i $f : A \to R^m$. Suposem $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Si cada una de les derivades parcials $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ existeix i és una funció contínua en A, aleshores, f és diferenciable en A.*

Ara podem introduir les derivades direccionals.

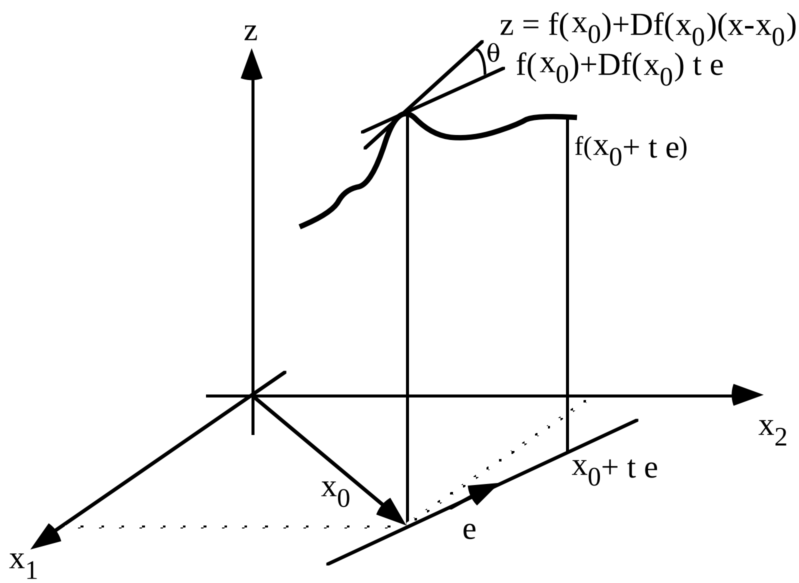
Definició 29. *(Derivada direccional.)*

Sigui f una funció real definida en un entorn de $x_0 \in R^n$ i sigui $e \in R^n$ un vector unitat. Aleshores,

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + te)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

s'anomena la derivada direccional de f en el punt x_0 en la direcció e.

En altres paraules, la derivada direccional es senzillament la taxa de canvi de la funció f en la direcció e. La figura 4.2 il.lustra aquest concepte pel cas d'una funció $f : R^2 \to R$.



Pendent de s = tg θ = derivada direccional

Figura 4.2: La derivada direccional.

La derivada direccional en la direcció e és igual a $Df(x_0) \cdot e$. Això és fàcil de veure a partir de la definició de $Df(x_0)$ amb $x = x_0 + te$:

$$\|\frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} - Df(x_0) \cdot e\| \leq \varepsilon |e\| \quad \text{per qualsevol } \varepsilon > 0.$$

si $|t|$ és prou petit. Així doncs, si f és diferenciable en el punt x_0 aleshores les derivades direccionals existeixen i estan donades per

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} = Df(x_0) \cdot e$$

La idea de derivada direccional és una generalització de la idea de derivada parcial. En particular, notem que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ és la derivada de la funció f en la direcció de la i-èsima coordenada, i.e. amb $e = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

4.5 La regla de la cadena.

Aquesta és una de les regles més importants de la diferenciació.

Teorema 25. *Sigui $f : A \to \Re^m$ una funció diferenciable definida en el conjunt obert $A \subset \Re^n$, i sigui $g : B \to \Re^p$ una funció diferenciable definida en el conjunt obert $B \subset \Re^m$. Suposem que $f(A) \subset B$. Aleshores, la funció composta $g \circ f$ és diferenciable en A i $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$.*

Per exemple, imaginem, que u, v, f són funcions reals de dues variables. Aleshores,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x,y), v(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

4.6 La regla del producte i els gradients.

La regla del producte també anomenada de Leibnitz diu el següent,

Teorema 26. *Sigui $A \subset \Re^n$ un conjunt obert. Siguin $f : A \to \Re^m$ i $g : A \to \Re$ funcions diferenciables. Aleshores, gf és diferenciable i per $x \in A, D(gf)(x) : \Re^n \to \Re^m$ ve donat per $D(gf)(x) \cdot e = g(x)(Df(x) \cdot e) + (Dg(x) \cdot e) f(x), \forall e \in \Re^n$.*

Abreviadament, podem escriure,

$$D(gf) = gDf + (Dg)f,$$

amb el sentit precís del teorema.

Per cocients podem adaptar el teorema anterior considerant el cas $1/g$ per obtenir, quan $g \neq 0$,

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gDf - fDg}{g^2}.$$

Altres regles de la diferenciació apareixen a partir de la linealitat de l'operador D:

$$D(f+g) = Df + Dg$$
$$D(\lambda f) = \lambda Df, \text{ per } \lambda \in \Re$$

4.7 El teorema del valor mig.

Teorema 27. *(i) Sigui $f : [a,b] \to \Re$ una funció continua i diferenciable a (a,b). Aleshores podem trobar $c \in [a,b]$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

(ii) Sigui $f : A \subset \Re^n \to \Re$ una funció diferenciable en un conjunt obert A. Per qualsevol parell $x, y \in A$ tal que la seva combinació lineal $L = (1-\lambda)x + \lambda y \in A$ per $\lambda \in [0,1]$ existeix un punt $c \in L$ tal que,

$$f(y) - f(x) = Df(c)(y - x).$$

(iii) Sigui $f : A \subset \Re^n \to \Re$ una funció diferenciable en un conjunt obert A. Suposem que $L \in A$ i $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Aleshores, existeixen punts $c_1, c_2, \ldots, c_m$ en L tal que

$$f_i(y) - f_i(x) = Df_i(c_i)(y - x), \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

La figura 4.3 il.ustra la part (i) del teorema.

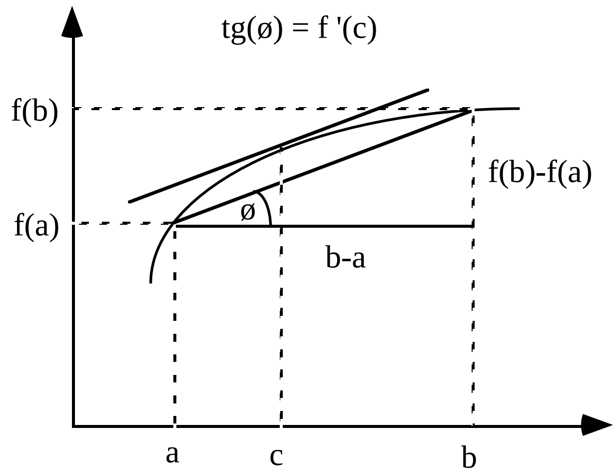


Figura 4.3: Diferenciabilitat.

4.8 El teorema de Taylor.

Per poder enunciar el teorema de Taylor necessitem, abans, introduir les derivades d'ordre superior.

Teorema 28. *Sigui $f : A \subset \Re^n \to \Re$ una funció dues vegades diferenciable en el conjunt obert A. Aleshores la matriu $D^2 f(x) : \Re^n \to \Re$ és,*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

on cada derivada parcial està avaluada en el punt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Per derivades de tercer ordre i superiors procedim de forma semblant.

Una propietat molt important de la segona derivada és la simetria, es a dir, la matriu del teorema 28 és simètrica:

Teorema 29. *Sigui $f : A \subset \Re^n \to \Re$ una funció dues vegades diferenciable en el conjunt obert A. Suposem que les funcions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ són contínues. Aleshores, $D^2 f$ és simètrica, és a dir,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Aquest teorema permet demostrar que les derivades d'ordre superior també són simètriques en condicions semblants.

La continuïtat exigida en el teorema 29 dona lloc a la següent definició:

Definició 30. *Diem que una funció és de classe C^r si les primeres r derivades existeixen i són funcions contínues. En altres paraules, les derivades parcials fins l'ordre r existeixen i són funcions contínues.*

Finalment poden enunciar el teorema de Taylor.

Teorema 30. *Sigui $f : A \subset \Re^n \to \Re$ una funció de classe C^r en el conjunt obert A. Considerem $x, y \in A$ tal que la seva combinació lineal $L = (1-\lambda)x + \lambda y \in A$ $(\lambda \in [0,1])$. Aleshores, existeix un punt $c \in L$ tal que,*

$$f(y) - f(x) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} D^k f(x)(y-x, \ldots, y-x) + \frac{1}{r!} D^r f(c)(y-x, \ldots, y-x)$$

on

$$D^k f(x)(y-x, \ldots, y-x) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \Big(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \Big) (y_{i_1} - x_{i_1}) \ldots (y_{i_k} - x_{i_k})$$

Una forma més familiar d'escriure el teorema de Taylor apareix introduint el següent canvi de variable: $y = x + h$. Aleshores, el teorema de Taylor es pot reformular com,

$$f(x+h) = f(x) + Df(x) \cdot h + \cdots + \frac{1}{(r-1)!} D^{r-1} f(x)\dot{(}h, \ldots, h) + R_{r-1}(x,h)$$

on $R_{r-1}(x,h)$ és el reste. A més,

$$\frac{R_{r-1}(x,h)}{\|h\|^{r-1}} \to 0 \ \text{ quan } h \to 0.$$

Exercicis

1. Demostrar que, en general, Df no está determinat de forma única. (Marsden p.156.)

2. Sigui $f : \Re^2 \to \Re^3$, $f(x,y) = (x^2, x^3, y, x^4 y)$. Computar Df. (Marsden p.159)

3. Sigui $L : \Re^n \to \Re^m$ una aplicació lineal (i.e. $L(x+y) = L(x) + L(y)$ i $L(\alpha x) = \alpha L(x)$). Demostrar que $DL(x) = L$. (Marsden p. 160)

4. Sigui $f(x,y,z) = x(siny)/z$. Computar el gradient de f. (Marsden p. 160)

5. Demostrar que $f : \Re \to \Re$, $x \to |x|$ és contínua pero no diferenciable a zero. (Marsden p. 161)

6. Verificar la regla de la cadena per $f(u,v,w) = u^2 v + w v^2$ i $u = xy$, $v = \sin x$, $w = e^x$. (Marsden p. 169)

7. Sigui $f : \Re \rightarrow \Re$ i sigui $F : \Re^2 \rightarrow \Re$, $F(x, y) = f(x, y)$. Verificar

$$x\frac{\partial F}{\partial x} = y\frac{\partial F}{\partial y}$$

   (Marsden p. 170)

8. Computar la fórmula de Taylor fins als elements de segon ordre per $f(x, y) = sin(x + 2y)$ al voltant del punt $(0, 0)$ (Marsden p. 181)

Capítol 5

Conjunts convexes a $\Re^n$.

5.1 Conjunts convexes.

Intuïtivament un conjunt C és convex quan no te "forats", o en altres paraules, si $\forall a, b \in C$ qualsevol punt c que es trobi en la recta que els uneix també pertany a C. Aquesta definició intuïtiva requereix que el conjunt C es trobi definit en un espai en el que la operació d'ajuntar dos punts amb una segment sigui factible. En conseqüència l'existència de conjunts convexes només te sentit en espais que admetin algun tipus d'estructura lineal. L'espai més senzill entre aquests és l'espai Euclidi $\Re^n$.

Definició 31. *(Segment.)*
Un segment amb extrems $a, b \in \Re^n$, que denotem com $[a, b]$ és el conjunt de punts de la forma

$$\alpha a + \beta b,\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1.$$

Un punt $c \in [a, b]$ s'anomena una combinació lineal convexa de a i b.

Definició 32. *(Combinació lineal convexa.) Una combinació lineal convexa d'un número finit de punts $a^i \in \Re^n, (i = 1, 2, \ldots, s)$ és un punt de la forma,*

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a^i,\ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, (i = 1, 2, \ldots, s)$$

Definició 33. *(Conjunt convex.)*
Un conjunt $X \subset \Re^n$ és convex si $a, b \in X$ implica $[a, b] \subset X$.

Aquesta definició està especificada en termes de dos punts del conjunt. Però podem també considerar un número arbitrari de punts.

Teorema 31. *Si X és un conjunt convex, conté les combinacions lineals convexes de qualsevol número arbitrari (però finit) dels seus punts.*

Un concepte més restrictiu que el de conjunt convex és el de conjunt estrictament convex.

Definició 34. *(Convexitat estricta.) Un conjunt $X \subset \Re^n$ és estrictament convex si $a, b \in X$ implica $c \in [a, b] \in int(X)$.*

La figura 5.1 il.lustra aquests conceptes.

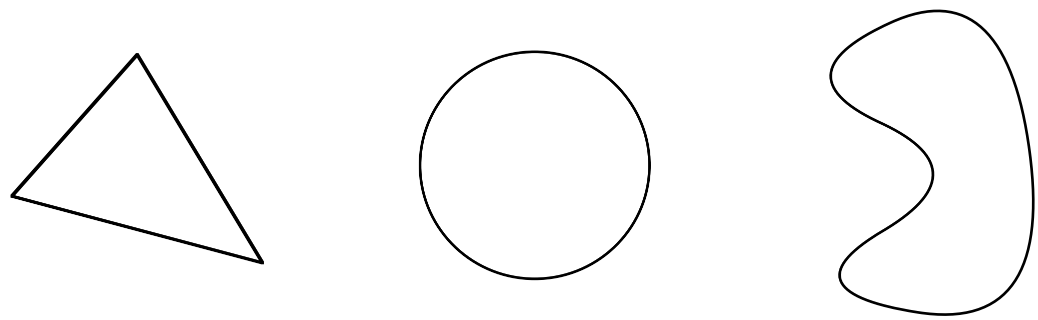


Figura 5.1: Conjunts convexes, estrictament convexes i no convexes.

5.2 Convexificació.

Un conjunt arbitrari $X \subset \Re^n$ no és necessàriament convex. Ara be, resulta natural pensar en la possibilitat d'afegir un conjunt de punts per tal d'obtenir un conjunt convex. Aquesta és la base de la idea de la convexificació d'un conjunt.

Definició 35. *(Convexificació d'un conjunt.)*
Considerem un conjunt $X \in \Re^n$ no convex. Diem que un conjunt $C(X) \supset X$ convexifica el conjunt X si és el superconjunt convex més petit possible del conjunt X.

La figura 5.2 il.lustra aquesta definició.
El teorema següent ens diu com construir el conjunt $C(X)$.

Teorema 32. *$C(X)$ és igual al conjunt de totes les combinacions lineals convexes dels punts del conjunt X.*

Podem però ser una mica més fins a l'hora de construir $C(X)$. De fet, donada la n-dimensionalitat de $\Re^n$ necessitem considerar solament combinacions lineals convexes de coeficients no negatius arbitraries de com a màxim de $n + 1$ punts.

Lema 2. *Si un punt x el podem representar com una combinació lineal no negativa d'un número finit de punts $x^i (i = 1, 2, \ldots, s)$ de $\Re^n$, una combinació lineal no negativa adient de un màxim de n punts d'entre els x^i és suficient per representar x.*

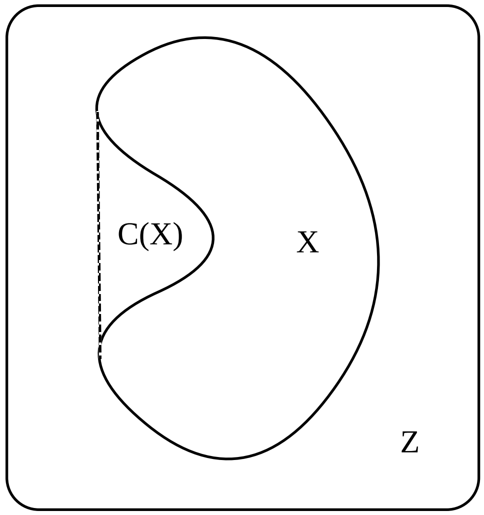


Figura 5.2: Convexificació de X per $C(X)$. Z no convexifica X.

Demostració. Si $s > n$, podem representar x com una combinació lineal no negativa de un màxim de $s-1$ punts entre els x^i. De fet, donat que $s > n$, aquests x^i són linealment depenents, el que vol dir que hi ha una relació lineal no trivial

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i x^i = 0.$$

Considerem ara

$$x = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x^i,\ \alpha_i > 0, (i = 1, 2, \ldots, s)$$

Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que alguns dels β_i són positius. Definim a continuació,

$$\theta = \min \frac{\alpha_i}{\beta_i},\ \text{per } \beta_i > 0.$$

Aleshores, podem escriure

$$x = \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i - \theta\beta_i) x^i.$$

Notem que $\alpha_i \geq \theta\beta_i$. Si $\beta_i < 0$, això és trivial a partir de la no negativitat de θ. Si $\beta_i > 0$, aleshores per construcció de θ també és cert que $\alpha_i \geq \theta\beta_i$.

A més, $\alpha_i \geq \theta\beta_i$ es redueix a $\alpha_i = \theta\beta_i$ per al menys un $\beta_i > 0$.

En conseqüència, tots els termes $\alpha_i - \theta\beta_i$ són no negatius i alguns d'ells són zero. Això vol dir que podem representar x com una combinació lineal no negativa de com a màxim $s-1$ punts entre els x^i. Reiterant aquest argument podem anar eliminant un per un punts x^i fins aconseguir que una combinació lineal no negativa dels restants punts x^i, com a màxim n, representi x. $\square$

Aquest lema permet “afinar” la construcció proposada del conjunt $C(X)$ proposada en el teorema 32.

Teorema 33. *La convexificació $C(X)$ del conjunt $X \subset \Re^n$ és igual al conjunt de tots els punts representats per*

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x^i, \sum_{i=1} n + 1\alpha_i = 1, \alpha - -i \geq 0(i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

on els $n+1$ punts x^i són linealment independents en X.

Una conseqüència òbvia de la definició de convexificació d'un conjunt és que un conjunt X és convex si i només si $X = C(X)$.

5.3 Topologia dels conjunts convexos.

Teorema 34. *Un conjunt convex és connex.*

Teorema 35. *Considerem un conjunt X convex. Aleshores,*

(i) La seva clausura, $cl(X)$ també és convexa.

(ii) Si $a \in X$ i $b \in cl(X)$ cada punt en el segment $[a, b]$ (excepte pot ser b) és un punt interior de X.

Corolari 2. *L'interior d'un conjunt convex és també convex.*

5.4 Aplicació: les preferències del consumidor.

Considerem un consumidor que podem representar per un *ordre de preferències*.

Definició 36. *(Preferències convexes.) Diem que l'ordre de preferències és convex si*

(1) el conjunt d'alternatives sobre el que l'ordre està definit és convex;

(2) donats dos punts a, b tal que $a \succ b, \forall c \in [a, b], c \neq b, c \succ b$;

(3) donats dos punts a, b tal que $a \sim b, \forall c \in [a, b], c \neq b, c \succeq b$.

Definició 37. *(Preferències estrictament convexes.) Diem que l'ordre de preferències és estrictament convex si*

(1) el conjunt d'alternatives sobre el que l'ordre està definit és convex;

(2) donats dos punts a, b tal que $a \succ b, \forall c \in [a, b], c \neq b, c \succ b$;

(3') donats dos punts a, b tal que $a \sim b, \forall c \in [a, b], c \neq b, c \succ b$.

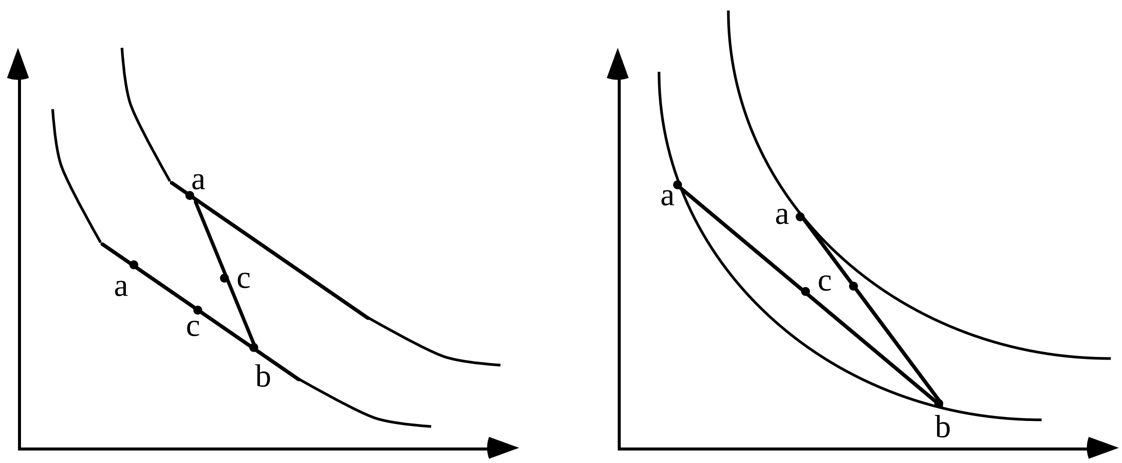


Figura 5.3: Preferències convexes i estrictament convexes.

La figura 5.3 il.lustra aquestes definicions.

Podem derivar varies implicacions del supòsit de convexitat de les preferències del consumidor.

- un ordre de preferències (estrictament) convex exclou els bens indivisibles.
- el conjunt de punts preferits o equivalents a qualsevol punt és un conjunt convex.
- si l'ordre de preferència és estrictament convex, la relació marginal e substitució és decreixent.

Exercicis

1. Demostrar que les solucions d'un sistema de desigualtats lineals

$$a_{\lambda 1}x_1 + a_{\lambda 2}x_2 + \cdots + a_{\lambda n}x_n \geq b_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$$

formen un conjunt convex a $\Re^n$. (Nikaido p.16)

Capítol 6

Teoremes de separació per conjunts convexes.

6.1 Hiperplans.

Considerem un pla $\wp$ a $\Re^3$ que passi pel punt **a** $= (a_1, a_2, a_3)$, i considerem un vector **p** $= (p_1, p_2, p_3) \neq (0, 0, 0)$ (veure figura 6.1). Dir que **p** és ortogonal a $\wp$ vol dir que **p** és ortogonal a qualsevol recta del pla.

Prenem un punt arbitrari del pla, **x** $\in \wp$. El vector **p** ha de ser perpendicular al vector **x-a**, i.e., el producte escalar

$$\mathbf{p(x\text{-}a)} = 0$$

és l'equació general del pla a $\Re^3$ que passa pel punt **a**.

Definició 38. *(Hiperpla a $\Re^n$.) Un hiperpla a $\Re^n$ que passa pel punt **a** i és ortogonal al vector **p** $= (p_1, p_2, \ldots, p_n) \neq$ **0** és el conjuint de tots els punts **x** que verifiquen*

$$\boldsymbol{p(x\text{-}a)} = 0$$

Alternativament podem definir un hiperpla com,

Definició 39. *Sigui $X \subset \Re^n,\ \beta \in \Re$. Un hiperpla és el conjunt de punts*

$$\wp = \{x \in X | \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \beta\}$$

Això vol dir que per dos punts arbitraris x, y del hiperpla, es verifica **p x** $=$ **p y** $= \beta$, de manera que podem escriure **p(x-y)** $= 0$ que implica que **p** és ortogonal al hiperpla.

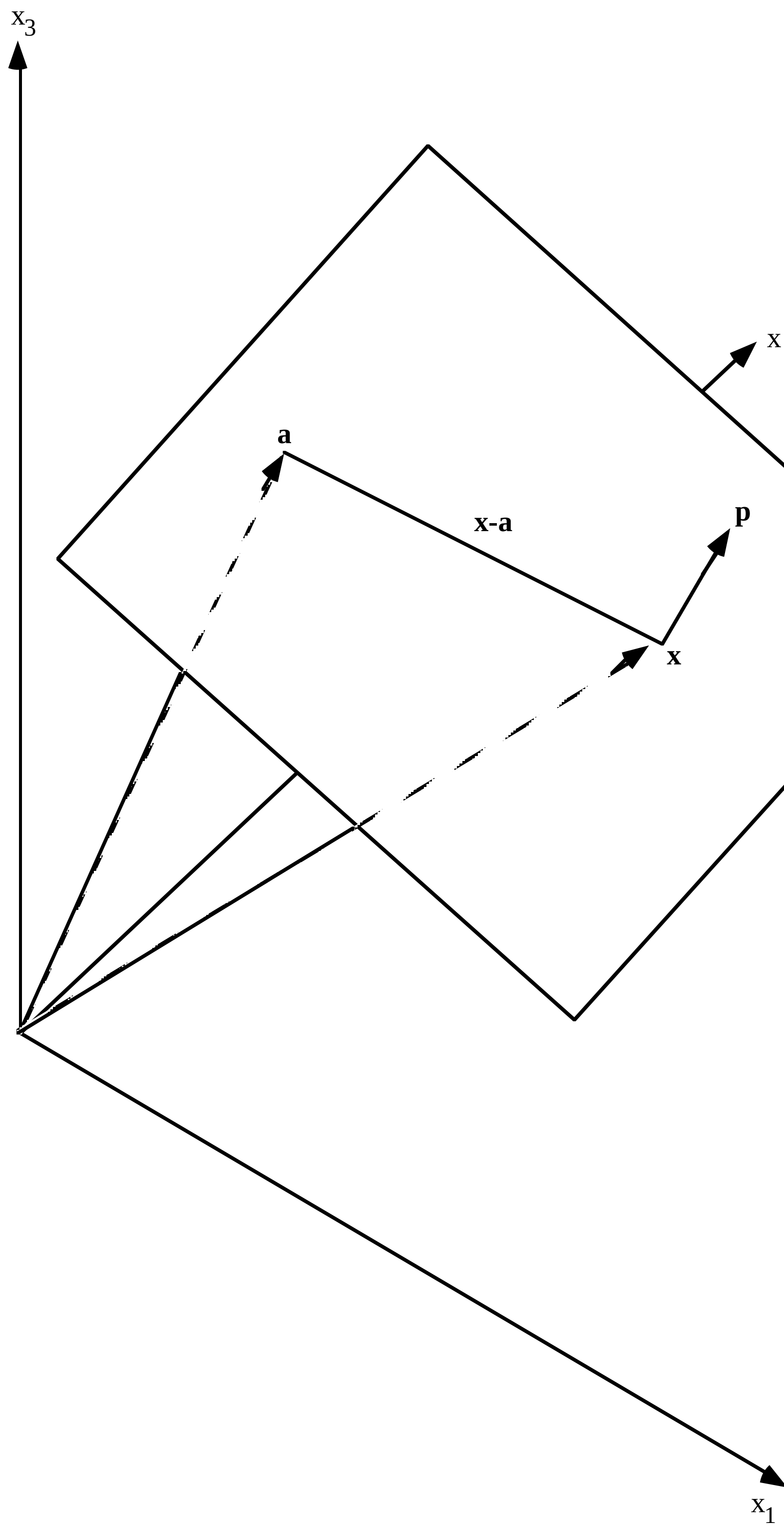


Figura 6.1: Pla a $\Re^3$.

6.2 Hiperplans suport.

Sigui $f(x)$ una funció definida a $\Re^n$. Suposem que és de classe C^1 i considerem un punt $a \in \Re^n$ tal que una de les derivades parcials no s'anula a a. Aleshores, l'expressió

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big]_{x=a}(x_i - a_i) = 0$$

representa l'equació del pla tangent en el punt a a la hipersuperfície $f(x) = f(a)$.

A $\Re$ aquesta equació només diu que la derivada de la funció f en el punts a ve donada per la pendent de la funció en el punt a.

Definició 40. *(Funció convexa.) Diem que una funció real $f(x)$ definida sobre un conjunt convex $X \subset \Re^n$ és convexa si*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),\ \forall x, y \in X,\ \lambda \geq 0.$$

Lema 3. *Sigui $f(x)$ és convexa en $\Re^n$. Considerem ara el conjunt $X = \{x | f(x) \leq f(a)\}$. Es clar que $a \in X$ de manera que $X \neq \emptyset$. Aleshores, X és convex.*

Demostració. Si $f(x)$ és convexa,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq f(a)$$

per qualsevol combinació lineal convexa $\lambda x + (1-\lambda)y$ de punts $x, y \in X$. Per tant X és convex. □

La figura 6.2 il.lustra aquest lema per f definida a $\Re$.

Definició 41. *(Hiperpla suport de X.) Sigui $X \in \Re^n$ un conjunt convex. Un hiperpla $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \beta$ s'anomena hiperpla suport de X si,*

(1) X es troba en un dels dos semiespais tancats, $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \beta$ o $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \beta$, i

(2) l'hiperpla te un punt en comú amb X.

Més específicament, si a és el punt d'intersecció de l'hiperpla amb el conjunt X, parlem de l'hiperpla suport de X en el punt a.

Lema 4. *Sigui $X \subset \Re^n$ un conjunt no buit, convex i tancat. Considerem $z \notin X$. Aleshores $\exists y \in X$ i $p \in \Re^n$, $p \neq 0$tal que $p \cdot z < p \cdot y < p \cdot x$, $\forall x \in X$.*

Demostració. En primer lloc escollim $y \in X$ com aquell punt de X mes pròxim a z, i.e. $y = min|x - z|,\ \forall x \in X$. La continuïtat de la norma euclídea i el fet de que X és un conjunt tancat ens asseguren que tal punt existeix.

Definim, a continuació $p \equiv y - z$.

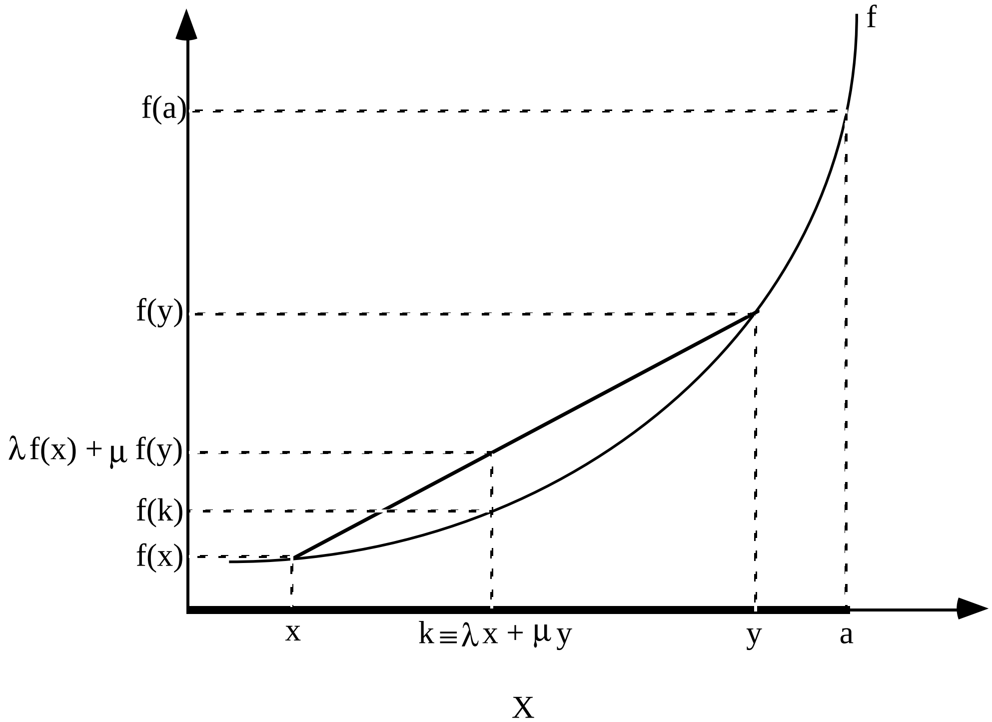


Figura 6.2: Convexitat de $X \subset \Re$.

Demostrem a continuació la desigualtat de l'esquerra del lema: $p \cdot z < p \cdot y$. Això és inmediat:

$$p \cdot z = p \cdot z - p \cdot y + p \cdot y = p \cdot (y - z) + p \cdot y = p \cdot (-p) + p \cdot y < p \cdot y$$

Per demostrar la desigualtat de la dreta ($p \cdot y < p \cdot x, \ \forall x \in X$) procedirem per contradicció.

Donat que X és convex, qualsevol punt $w = \alpha x + (1-\alpha) y = y + \alpha(x-y), \ \alpha \in [0,1]$ també pertany al conjunt X.

Considerem

$$\begin{aligned}
|z-y|^2 - |z-w|^2 &= |z-y|^2 - |z-y-\alpha(x-y)|^2 \\
&= (z-y)(z-y) - [(z-y)(z-y) - 2\alpha(z-y)(x-y) + \alpha^2(x-y)(x-y)] \\
&= 2\alpha(z-y)(x-y) - \alpha^2(x-y)(x-y)] = -2\alpha p(x-y) - \alpha^2(x-y)(x-y)] \\
&= -\alpha[2p(x-y) + \alpha(x-y)(x-y)]
\end{aligned}$$

Suposem, a senso contrario, $p \cdot x < p \cdot y$. Aleshores $p(x-y)$ en l'expressió anterior es negatiu. En conseqüència, per α prou petit $|z-y|^2 - |z-w|^2 > 0$, és a dir, $|z-y| > |z-w|$, pero això és contradictori amb el fet de que y esta definit com aquell element de X més proper a z. $\square$

Aquest lema ens diu que per un conjunt no buit, tancat, convex i que no inclogui tot l'espai, podem trobar un hiperpla que separi aquest conjunt d'un punt de fora del conjunt.

Aquest lema es molt important per demostrar els teoremes que enunciarem a continuació.

6.3 Teoremes de separació.

Presentem dos teoremes de separació. El primer considera la possibilitat de definir un hiperpla separador en respecte a un conjunt convex. El segon considera la separació de dos conjunts convexos.

Teorema 36. *(Minkowski) Sigui $X \in \Re^n$ un conjunt convex. Aleshores podem construir un hiperpla que passi per un punt z i separador per X si $z \notin int(X)$.*

Demostració. Hem de distingir dos casos.

Si $z \notin X$, aleshores una aplicació directa del lema 4 prova el resultat.

Si $z \in \partial(X)$, considerem una seqüència de punts $z^v \notin X$ tal que $z^v \to z$. Sigui p^v la corresponent seqüència de normals escollits de manera que tinguin longitud unitat. Aquesta seqüència estroba en l'esfera unitat (que es un conjunt compacte), de manera que te una subseqüència convergent que te com límit la norma p requerida. $\square$

Les figures 6.3 i 6.4 il.lustren aquest teorema.

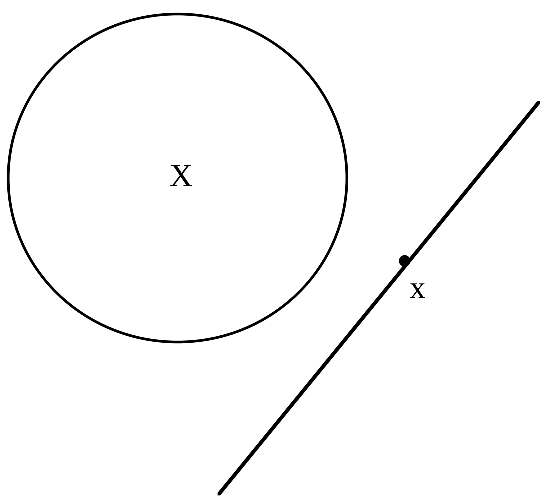


Figura 6.3: El teorema 36 per $z \notin X$.

Teorema 37. *Siguin $X, Y \in \Re^n$ dos conjunts convexos, no buits tal que $X \bigcap Y = \emptyset$. Aleshores podem construir un hiperpla separador d'ambdós conjunts, i.e. $\exists p \in \Re^n,\ p \neq 0$ tal que $p \cdot x \geq p \cdot y,\ \forall x \in X, y \in Y$.*

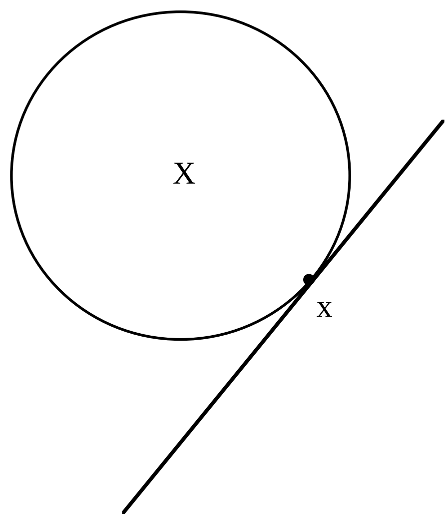


Figura 6.4: El teorema 36 per $z \in \partial(X)$.

Demostració. Definim $K \equiv X - Y$. K és un conjunt convex. Donat que $X \bigcap Y = \emptyset$, $0 \in K$. Podem aplicar el lema refseplemma de manera que $\exists p$ tal que $p \cdot z \geq p \cdot 0 = 0$, $\forall z \in K$. Definim $z = x - y$. Aleshores, $p \cdot x \geq p \cdot y$. $\square$

La figura 6.5 il.lustra aquest teorema, sota diferents supòsits sobre els conjunts X i Y. El cas (a) considera que ambdós conjunts són tancats, els casos (b) i (c) il.lustren el teorema pel cas en que ambdós conjunts no són tancats.

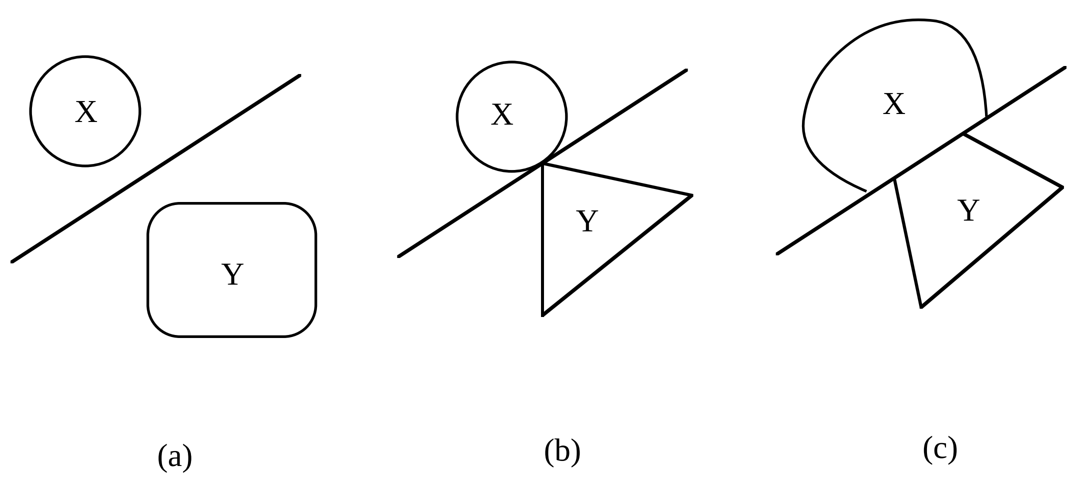


Figura 6.5: El teorema 37.

6.4 Aplicació: L'economia de Robinson Crusoe.

Considerem una economia amb un individu que ha de prendre de forma combinada les seves decisions de producció i consum. Aquesta és la situació en la que es troba en Robinson Crusoe. Per fer l'argument senzill suposarem solament dos bens, el treball d'en Robinson i l'aliment que produeix amb aquest treball. Finalment a efectes de representació gràfica adoptarem la convenció "inputs negatius" de manera que els conjunts que considerarem seran subconjunts del segon quadrant.

Les decisions de Robinson com director de producció es poden subdividir en la determinació de la quantitat dels recursos naturals que ha d'utilitzar, i en l'elecció del mètode per combinar aquests recursos amb el seu treball per produir aliments. A aquestes decisions les anomenarem *decisions d'oferta*. Formalment, aquestes decisions conjuntes d'utilització de recursos i de producció consisteix en escollir un punt w en un *conjunt d'oferta* W en l'espai de bens format per treball i aliments. Suposem que aquest conjunt és convex i tancat.

Per altra banda tenim les decisions de Robinson com treballador i consumidor d'aliments. Es a dir, hem de determinar si Robinson pot oferir la quantitat de treball indicada per l'abcisa d'algun punt $w \in W$. Aquesta consideració s'expressa a partir d'un *conjunt de consum* X, que conté tots els punts x que representen combinacions de provisió de treball i consum d'aliments que permeten sobreviure a en Robinson. Suposem que aquest conjunt és també convex i tancat.

Suposarem que la intersecció d'ambdós conjunts, el que anomenem *conjunt factible* A no és buida. Suposem que aquest conjunt és afitat. A més, donat que $A = W \bigcap X$, el conjunt factible és tancat. Per tant, A és compacte. Aquesta situació es representa en la figura 6.6.

6.4.1 Les preferències d'en Robinson.

Suposem que com consumidor en Robinson pren les seves decisions d'acord a un *ordre complert de preferències* sobre els punts del conjunt de consum X. Això és una regla de decisió amb les següents propietats:

- $\forall x \in X, x \succeq x$ (reflexivitat),
- $\forall x, y, z \in X$, si $x \succeq y$ i $y \succeq z$ aleshores $x \succeq z$ (transitivitat),
- $\forall x, y \in X, x \succeq y$ o be $y \succeq x$,
- $\forall x, y \in X$, si $x \succeq y$ i $y \succeq x$, aleshores, $x \sim y$.

L'ordre s'aplica postulant que per cada subconjunt de punts del conjunt de consum que li resulti factible, Robinson seleccionara sempre que li sigui possible, un preferit o equivalent a tots els demés punts del conjunt factible.

Suposarem, finalment que aquest ordre de preferències és representable amb una funció d'utilitat contínua. La figura 6.7 mostra el mapa de corbes d'indiferència corresponent a les preferències d'en Robinson.

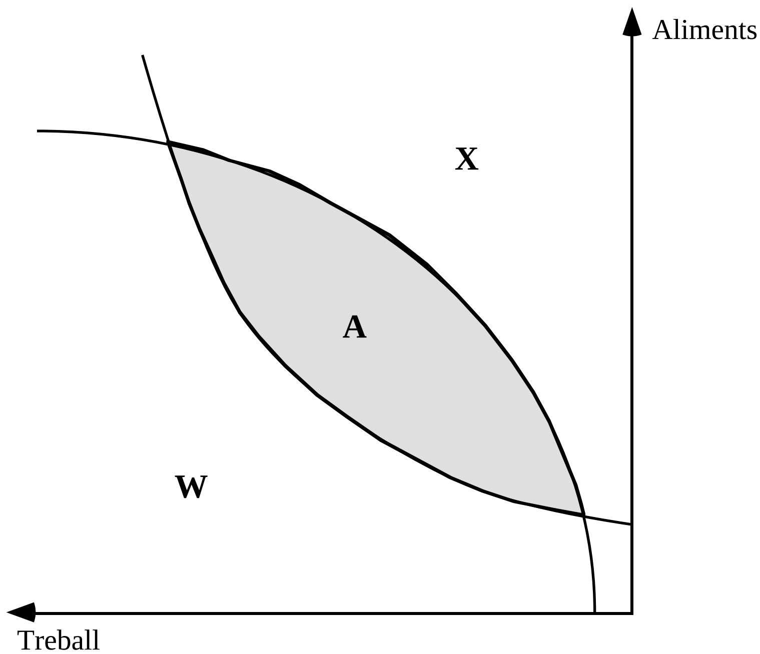


Figura 6.6: El conjunt factible d'en Robinson Crusoe.

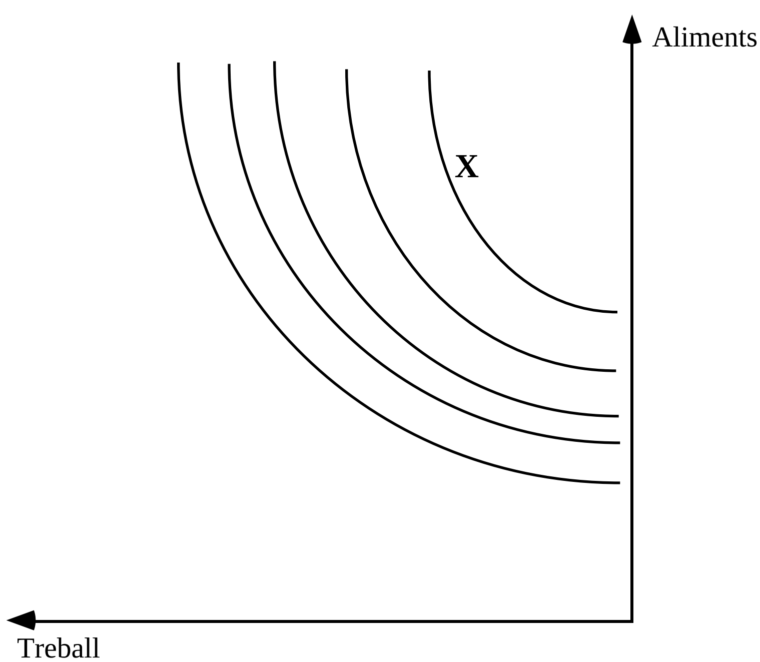


Figura 6.7: Les preferències d'en Robinson Crusoe.

6.4.2 Les decisions d'en Robinson.

Combinant les preferències d'en Robinson amb el conjunt de producció podem identificar els punts millors dins del conjunt factible. Suposem que hi ha només un punt $x \in A$ que és el preferit o equivalent tots els punts del conjunt factible. Com la funció d'utilitat és contínua i el conjunt A és compacte, estem segurs que aquest punt existeix. A més com les preferències són convexes, aquest punt ha de trobar-se a la frontera del conjunt A i del conjunt W. Fixem-nos que si $x \notin \partial W$, voldria dir que $\exists x' \in B_\varepsilon(x)$ tal que $x' \succeq x$, (recordem que les preferències no tenen cap punt de saturació) de manera que x no seria màxim i obtindríem una contradicció.

Suposem també (encara que no és estrictament necessari) que existeix un sistema de preus amb ajuda del qual en Robinson pot separar les seves decisions com a productor i com a consumidor.

Definim el conjunt $X(x) = \{y \in X | y \succeq x\}$ de punts del conjunt de consum que són preferits o equivalents a x. Aquest conjunt el denominem *conjunt no inferior* a x i és un conjunt convex com a conseqüència de la convexitat de les preferències. En altres paraules, $X(x) \bigcap A = x$. Suposem per últim, que podem dibuixar una recta separadora P del conjunt d'oferta W i del conjunt no inferior $X(x)$. Tècnicament, aquesta recta P és un pla suport d'ambdós conjunts i per tant l'únic punt en comú entre aquest pla i els conjunts $X(x)$ i W és precisament el punt x. La situació es representa en la figura 6.8.

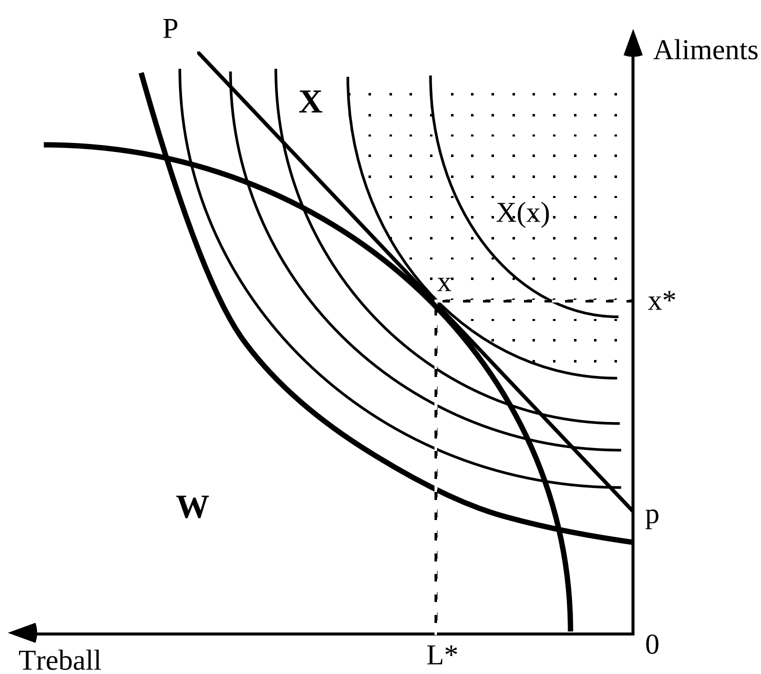


Figura 6.8: Les decisions d'en Robinson Crusoe.

Sota aquestes condicions, en Robinson pot separar les seves decisions de producció i consum d'acord amb el procediment següent.

A partir de la pendent de la recta P en Robinson pot definir dos preus (no nuls), un pel treball i un altra pels aliments. Com director de producció escull aquell punt del conjunt de producció que maximitza el seu ingrés. Aquest és el punt x. La magnitud d'aquest ingrés ve donada per el segment $0p$ multiplicat pel preu dels aliments. El Robinson productor ingrés assigna aquest ingrés al Robinson consumidor-treballador com renda no derivada del treball. A partir d'aquesta renda, el Robinson consumidor pot assolir un conjunt de combinacions de treball i consum, intercanviant treball per aliments als preus donats. Aquest conjunt és la part del segon quadrant per sota de o en la recta P. Dins d'aquest conjunt, la millor elecció és el punt x.

Donat que la selecció del millor punt tant com a productor i com a consumidor condueix al mateix punt diem que les decisions d'ambdós Robinsons són compatibles. La conclusió d'aquest argument és doncs que sota certes condicions existeix una recta separadora que defineix un sistema de preus que fa possible la descentralització de las decisions de producció i consum.

Aquest argument es pot generalitzar a un número arbitrari de dimensions. Aquest és el contingut de la següent,

Proposició 1. *Si els conjunts W i X són convexos i tancats, si el conjunt intersecció A és compacte i no buit, i si l'ordre de preferència és convex, aleshores existeix un punt x que és el millor en el conjunt A.*

Si el conjunt A no conté cap punt de saturació, aleshores, qualsevol punt que sigui millor pertany a la frontera del conjunt d'oferta W. A cada un d'aquests punts, se li pot associar un sistema de preus, no tot nuls, tal que

(a) el màxim ingrés assolible en el conjunt d'oferta s'obté a x,

(b) la despesa necessària per que el consumidor pogués assolir un punt preferit a x és superior o igual a la que permet adquirir x.

Si existeix més d'un punt que és millor dins del conjunt A, es pot trobar un únic sistema de preus tal que les afirmacions (a) i (b) siguin vàlides per tots els punts d'aquest tipus.

6.4.3 El paper de la convexitat.

La proposició 1 encara que interessants presenta dues dificultats. Per una part, la part (b) admet la possibilitat d'un punt preferit a x assolible amb la mateixa despesa que la necessària per obtenir x. Si tal punt alternatiu existeix, no podem afirmar que x sigui el punt millor entre tots aquells que el Robinson consumidor pot comprar. Per altra part, la proposició no garantitza la unicitat del punt maximitzador d'ingressos pel Robinson productor ni del punt maximitzador d'utilitat pel Robinson consumidor. La conseqüència d'ambdues dificultats és que el sistema de preus no permet per ell mateix una descentralització completa de les decisions de producció i consum.

Podem doncs reformular la proposició 1 introduint supòsits de convexitat estricta.

Proposició 2. *Suposem que x és un punt millor en el conjunt assolible i no és un punt de saturació; suposem que el conjunt d'oferta W és estrictament convex en x; suposem que el conjunt de consum X és estrictament convex o $x \in int(X)$; suposem finalment que l'ordre de preferència és representable i estrictament convex. Aleshores, existeix un sistema de preus tal que x és l'únic punt del conjunt d'oferta en el que es maximitza l'ingrés i a més és l'únic punt millor dins del conjunt de consum entre aquells tal que la despesa necessària per assolir-los no supera al cost de x.*

Aquesta formulació encara que permet superar ambdues dificultats resulta massa exigent en termes de supòsits (per exemple, la convexitat estricta del conjunt de producció implica rendiments decreixents a escala). Per tant, normalment, abandonarem la dificultat associada a la unicitat de la resposta optimitzadora i ens concentrarem en les condicions sota les que una vegada identificat un òptim el podem sostenir mitjançant un sistema de preus.

Capítol 7

Teoremes de punt fix.

Sigui X un conjunt i $f(x) : X \to X$ una funció de X en si mateix. En general cada punt x de X es projecta mitjançant f en un punt $f(x)$ que pot ser diferent de x o pot coincidir amb x. Un punt $\widehat{x}$ amb la particularitat que te com imatge ell mateix s'anomena un *punt fix de la funció* f.

L'existència de punts fixos depèn crucialment de les propietats topològiques de X i de la funció f.

Enunciarem dos teoremes que donen condicions per asseguraar l'existència de punts fixos. El primer es deu a Brower. Aquest considera el cas de X compacte i convex i f contínua. També presentarem una generalització d'aqeust resultat desenvolupada per Kakutani.

Teorema 38. *(Brower)*

Sgui $X \subset \Re^n$ un conjunt compacte, convex i no buit. Sigui $f : X \to X$ una funció contínua que associa un punt $x \in X$ a un punt $f(x) \in X$. Aleshores, f te un punt fix $\widehat{x}$ de manera que $\widehat{x} = f(\widehat{x})$.

La figura 7.1 il.lustra el teorema de Brower a $\Re$.

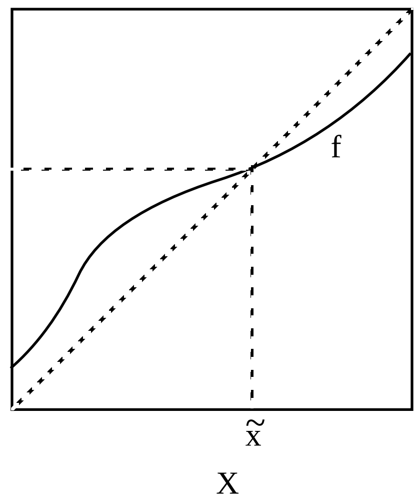


Figura 7.1: El teorema de Brower.

Bibliografía

Iribarren, I.L., 1973, *Topología de Espacios Métricos*, Mexico, Limusa-Wiley.

Koopmans, T.C., 1980, *Tres Ensayos sobre el Estado de la Ciencia Económica*, Barcelona, A. Bosch editor.

Nikaido, H., 1968, *Convex Structures and Economic Theory*, New York, Academic Press.

Marsden, J.E. ,1974, *Elementary Classical Analysis*, San Francisco, V.H. Freeman and Co.

Starr, R.M., 1997, *General Equilibrium Theory. An Introduction*, Cambrige, Cambridge University Press.