Capítol 1

Introducció.

Quin és el contingut de la teoria de jocs?, quin és l'origen de la teoria de jocs?; on va la teoria de jocs?; cóm ens pot ajudar la teoria de jocs?. Aquestes són preguntes que ens il.lustraràn sobre l'interès que té la teoria de jocs pels economistes.

Definim un joc (no degenerat) com una situació on agents amb objectius enfrontats interaccionen. En l'acció de conduir un cotxe estem jugant un joc amb els altres conductors dels altres cotxes; si participem en una subhasta estem jugant un joc amb les altres persones que també hi participen; quan el director d'un supermercat decideix el preu de venda de les llaunes de sardines, està jugant un joc amb els seus clients i amb els supermercats de la competència; quan un sindicat negocia el conveni col.lectiu amb una empresa, ambdós estan jugant un joc; l'advocat defensor i el fiscal juguen un joc quan decideixen quins arguments presentar al jutge.

Atès que totes aquestes situacions són jocs, és clar que la teoria de jocs és important. Essent radicals podríem dir que les ciències socials són una disciplina de la teoria de jocs. Un supòsit fonamental de la teoria de jocs (i de qualsevol teoria en l'àmbit de l'economia) és que els agents actuen de forma *racional*. Això no vol dir que considerem que els agents *sempre* actuen de forma racional, però tampoc és veritat que les persones sempre actuïn irracionalment. La majoria de nosaltres mirem de gastar els diners de forma raonable, i la majoria de vegades no ho fem massa malament. D'altre manera, la teoria econòmica no tindria sentit ni contingut. Encara que no prevèiem totes les contingències davant d'una decisió, això no vol dir que actuem de forma irracional. De fet, la teoria de jocs permet explicar amb força precisió el comportament de plantes i insectes cap dels quals podem dir que pensin. El seu comportament és racional perquè els elements irracionals han estat extingits per la via de l'evolució. De la mateixa manera podem pensar que l'evolució pot extingir altres tipus de comportaments inadaptats o marginals en contextos socials. Per exemple, empreses que són dirigides de forma poc professional tendeixen a desaparèixer de l'escena. El text que esteu a punt de començar representa un intent de posar a l’abast dels lectors interessats una presentació senzilla del contingut de la teoria dels jocs. Abans de res cal aclarir que tot i que els jocs de sobretaula també estan continguts en l’anàlisi de la teoria dels jocs, el lector no trobarà en aquestes planes un manual de cóm guanyar al poker, als escacs o al dominó posem per cas. L’objectiu és molt més ambiciós (i molt menys prosaic). Es tracta d’aprendre a pensar sobre com abordar una situació en la que una persona ha de prendre decisions que no solament l’afectaran a ella sinó també a altres persones que es troben involucrades en el jocs i amb les que te un conflicte d’interessos.

Per poder assolir l’objectiu de fer aquesta presentació de la teoria de jocs entenedora i amena, es molt aconsellable que el lector estigui familiaritzat amb les tècniques del càlcul diferencial. Sense aquest requisit de base, el lector encara que podrà obtenir una idea general del contingut de la teoria de jocs, no podrà captar les subtileses d’alguns conceptes fonamentals com per exemple l’equilibri de Nash o l’equilibri perfecte en els subjocs. En altres paraules, es com aquell individu que es compra un Ferrari per circular per un camí de carro. Té un vehicle d’unes prestacions d’somni de les que no pot gaudir.

Per procedir en cert ordre lògic i de dificultat creixent, començarem amb la descripció d’un joc i oferirem exemples entenedors. A continuació introduirem una eina tècnica bàsica en l’anàlisi dels jocs: la teoria de l’utilitat esperada. Per últim, presentarem la manera com representem un joc, el que ens donara peu a parlar de la informació de que disposa el jugador quan ha de prendre decisions i les conseqüències que la riquesa o pobresa d’aquesta informació te sobre el resultat del joc.

1.1 Descripció d’un joc.

D’acord amb el diccionari, un joc és qualsevol passatemps o diversió. Donada l’amplitud d’aquesta definició i per fer-la operativa hem de mirar d’organitzar-la. Així podem distingir entre, per exemple,

- jocs de sobretaula
  - tablero
    - 2 jugadors: escacs;
    - n jugadors: monopoly ($n \in [2, 8]$);
  - cartes
    - 1 jugador: solitari;
    - n jugadors: poker ($n \in [2, 7]$);

  * parelles: bridge;

- videojocs
  - 1 jugador;
  - n jugadors (en xarxa);
- jocs esportius
  - individuals: tennis, patinatge;
  - equip: hoquei, futbol, bàsquet, handbol.

Tots aquests exemples estan coberts per la definició de joc. Per tant han de tenir algunes característiques en comú. Aquestes són fonamentalment quatre:

(a) Tots els jocs tenen *regles*, és a dir, una descripció de les accions que cada jugador pot fer en cada situació del joc. La violació d'aquestes regles està penalitzada.

(b) En tots els jocs, les *estratègies* (plans d'accions) dels jugadors són importants. Un dels objectius de la teoria de jocs serà precisament diferenciar les estratègies bones de les dolentes.

(c) En tot joc hi ha un *resultat*, és a dir, qui guanya i què guanya.

(d) En tot joc (amb més d'un jugador) hi ha *interacció estratègica*, és a dir, el resultat del joc depèn de les estratègies dels jugadors.

Aquestes característiques comunes ens permeten oferir una definició operativa d'un joc.

Definició 1.1 (Joc). *Un joc és una situació governada per regles amb un resultat ben definit caracteritzat per la interacció estratègica entre els jugadors.*

Així doncs, per la teoria de jocs, qualsevol situació que satisfaci aquesta definició és un joc. Aquesta és una concepció molt amplia del concepte de joc. En particular, aquesta definició inclou situacions que el diccionari *no* defineix com jocs. Per exemple,

- Competència entre empreses (Jocs d'empreses)

  regles : llei de contractes, de la propietat, de defensa de la competència, de salut pública, de documentació comptable, etc.

  resultat : beneficis, quota de mercat, cotització de les accions, etc.

estratègies : preus, quantitats, publicitat, tipus de mercat en els que operar, tipus de contractes als empleats, etc.

interacció estratègica : el resultat per una empresa no solament depèn de les seves decisions sinó també de les decisions de les altres empreses. (e.g. Coca-Cola vs. Pepsi-Cola; IBM vs. Compac, ...)

- Negociacions econòmiques: Executiu vs. Legislatiu per aprovar la Llei de Pressupostos, reunions del G-7, del GATT, etc.

- Negociacions polítiques: EU, Bòsnia, Kosovo, paper de Rússia a Europa, etc.

A la vegada però, la teoria de jocs és molt restrictiva en termes de la consideració dels jugadors.

Definició 1.2 (Teoria de jocs). *La teoria de jocs es pot definir com l'estudi de models matemàtics de conflicte i cooperació entre agents racionals.*

Els dos elements fonamentals d'aquesta definició són les relacions de conflicte i de cooperació entre els jugadors.

La situació és de *conflicte* perquè els interessos dels individus que interrelacionen en una situació de joc són diferents. Jugar un joc és com repartir un pastis. Cada jugador aspira a obtenir el tros més gran possible. Es important senyalar que aquest conflicte d'interessos pot tenir com a conseqüència que el tamany del pastis a repartir no sigui tot lo gran que podria ser. En aquest sentit ens referirem a la eficiència o ineficiència del resultat del joc.

La situació és de *cooperació* perquè un joc es pot entendre com un intercanvi voluntari. Quan dos parts decideixen realitzar un intercanvi entre elles és perquè hi troben avantatges. Aquestes avantatges poden provenir de tres fonts diferents (veure McMillan (1992)):

preferències diferents del les parts. Diferents jugadors poden avaluar de forma diferent l'objecte d'intercanvi, de manera que un d'ells voldrà "vendreï l'altre voldrà "comprar".

avantatja comparativa de les parts. Diferents jugadors poden tenir diferents habilitats per produir un be o un servei, per resoldre uns tipus de problemes o uns altres. Per tant el jugador més eficient pot vendre la seva habilitat a un preu més baix.

informació diferent de les parts. En el moment de l'intercanvi, diferents jugadors poden tenir informació diferent sobre l'objecte de l'intercanvi. Aquesta informació diferent pot influir en la valoració de l'objecte de l'intercanvi pels diferents jugadors, de manera que aquells amb més alta valoració seran "compradors", i els jugadors amb valoracions més baixes seran "venedors".

I/II	preu alt	preu baix
preu alt	10,10	1,15
preu baix	15,1	4,4

Taula 1.1: Un joc de suma no-zero.

En qualsevol d'aquestes situacions, l'intercanvi (entès com cooperació) proporciona guanys a totes les parts involucrades en el joc.

Una distinció important a l'hora d'analitzar un joc és l'*eficiència* del seu resultat. Reprenent l'imatge del joc com el repartiment d'un pastis, direm que el resultat del joc és eficient si els jugadors obtenen el tros de pastis més gran al que poden aspirar, i a més el tamany del pastis objecte del repartiment és el més gran possible. En aquest sentit podem distingir entre *jocs de suma zero* i *jocs de suma no zero*.

Els jocs de suma zero (relativament limitats) representen situacions on els guanys agregats dels jugadors són constants. Són jocs de conflicte pur. En altres paraules, el tamany del pastis es constant i l'única preocupació és analitzar com les accions dels jugadors afecten a la distribució del pastis entre els jugadors. El que representen guanys per un jugador, representen pèrdues per un altre jugador. La solució d'aquests jocs, per construcció, és eficient. Pensem en un joc de cara o creu, on si surt cara el jugador I es queda la moneda i si surt creu el jugador II es queda la moneda.

Els jocs de suma no zero (la majoria de situacions), a diferència dels anteriors representen situacions on els guanys agregats dels jugadors i la distribució d'aquests guanys, depenen de les decisions dels jugadors. Són jocs que presenten una disjuntiva entre conflicte i cooperació. Considerem l'exemple següent (McMillan (1992) p. 26): dues empreses competeixen en un mateix mercat de producte homogeni. Poden decidir entre un preu alt o baix. D'acord amb aquestes decisions obtindran beneficis diferents. Aquests beneficis (en milions d'euros) es mostren en la taula següent,

Si l'empresa I *pensa* que l'empresa II decidira el preu alt, la seva millor decisió serà utilitzar el preu baix perquè això li permet obtenir uns beneficis de 15 milions en lloc dels 10 milions que obtindria si ella també decidís el preu alt.

Si l'empresa I *pensa* que l'empresa II decidira el preu baix, la seva millor decisió serà utilitzar també el preu baix perquè això li permet obtenir uns beneficis de 4 milions en lloc de 1 milió que obtindria si ella decidís el preu alt.

Veiem doncs que, en aquest exemple, independentment de l'acció que prengui el jugador II, el jugador I sempre troba òptim utilitzar el preu baix.

Podem fer un argument paral.lel per l'empresa II, i conclourem que aquestes empreses vendran els seus productes al preu baix i obtindran uns beneficis de 4 milions cada una.

Aquest resultat del joc, des d'el punt de vista de les empreses, no és eficient. Agregadament, les empreses es reparteixen uns beneficis de 8 milions. En canvi si ambdues haguessin decidit el preu alt agregadament es repartirien 20 milions.

Aquesta ineficiència es conseqüència de la disjuntiva entre el conflicte i la cooperació entre els jugadors, i apareix molt freqüentment en els jocs de suma no zero. Veurem que és inevitable si el joc es juga solament una vegada i els jugadors no es poden comprometre de forma creïble a portar a terme una certa decisió (jugar el preu alt en el nostre exemple). En canvi, si el joc (i) es juga de forma repetida, (ii) els jugadors poden observar totes les decisions anteriors, (iii) els jugadors es poden comprometre, (iv) es poden penalitzar les desviacions dels compromisos i (v) la valoració dels pagaments futurs és suficientment important en respecte als pagaments presents per tots els jugadors, podem obtenir solucions eficients.

La teoria de jocs s'ocupa de situacions on les decisions d'un agent te efectes sobre el nivell de benestar d'altres agents. Un títol alternatiu, segurament més acurat i menys suggerent d'activitats lúdiques, seria "Anàlisi de situacions de conflicte".

En el llenguatge de la teoria de jocs, un joc, com acabem de veure, és qualsevol situació en la que hi ha dos o més agents implicats. Aquests agents els denominem *jugadors* i els suposem *racionals*. Això vol dir que els jugadors prenen decisions consistents amb la consecució dels seus objectius. Cada jugador te com *objectiu* la maximització del *valor esperat* que el joc te per ell. Aquest valor esperat és una mesura en una escala d'*utilitat*. Aquesta idea sobre el comportament dels jugadors es remunta, com a mínim a Bernulli (1738). La justificació moderna, però, es deu a Von Neumann i Morgenstern (1947) en el que es coneix com la *teoria de l'utilitat esperada*. Una adient comprensió de les idees fonamentals de la teoria de jocs requereix doncs l'estudi de la teoria de l'utilitat esperada i més en general de la teoria de la decisió (que inclou l'estudi de les probabilitats subjectives i la fórmula de Bayes).

Abans de procedir per aquest camí, mirarem d'aprofundir en el significat de la teoria de jocs. Per això, considerem la següent definició (equivalent a l'anterior).

Definició 1.3 (Teoria de jocs). *La teoria de jocs és l'estudi de la solució de situacions de joc. Es a dir, l'estudi de quina estratègia ha d'utilitzar cada jugador per a obtenir el millor resultat possible.*

En altres paraules, la teoria de jocs *no* mira de d'explicar *cóm* la gent juga certs jocs, sinó que el seu objectiu és identificar les accions òptimes de cada individu davant la interdependència de les seves decisions amb les dels altres jugadors. A la seva vegada, la identificació d'aquestes accions ens dirà el resultat que cada jugador obtindrà del joc.

Els jugadors són perfectes en el sentit de perfectament racionals en la forma com pensen, raonen i en les seves habilitats mentals. Així doncs, la correspondència entre jocs en la teoria de jocs i jocs de vida real és com la correspondència entre el consumidor ideal de la teoria del consumidor i el consumidor real. Per tant podem dir que la teoria de jocs és la teoria del joc racional.

Es important senyalar ara que una característica no explícitament mencionada dels jocs és que els jugadors poden haver d'enfrontar-se a situacions que contenen elements aleatoris o probabilístics. En altres paraules, la informació de la que disposen els jugadors en el moment de prendre una decisió es fonamental en la determinació del resultat del joc. Diem que un joc te *informació perfecta* quan cada jugador coneix les conseqüències de qualsevol decisió de qualsevol jugador. En altre cas parlem de jocs d'*informació imperfecta* i els jugadors prenen decisions en condicions de risc. Més endavant serem més precisos en el tractament de la informació del joc.

Una conseqüència de la importància de la informació de la que disposen els jugadors és, com ja hem mencionat abans, que un prerequisit per una bona teoria de jocs és una bona teoria de la decisió racional amb risc (incertesa), també anomenada teoria de l'utilitat (cardinal) esperada per Von Neumann i Morgenstern. Per evitar confusions amb els mots, ara “utilitat”no es refereix a una representació de preferències sinó a que si les decisions en condicions de risc es fan de manera racional, és *com si* el jugador assignes nivells d'utilitat numèrics als diferents resultats possibles, i escullis l'acció amb “utilitat esperada”més alta. Aquesta teoria de l'utilitat esperada de Von Neumann i Morgenstern resulta una eina bàsica per l'estudi de la conducta dels individus racionals.

Igualment important és assenyalar que la forma com els individus prenen les decisions depèn de si poden (sense estar obligats a) coordinar-se o no. En el primer cas parlem de *jocs cooperatius*, i la pregunta fonamental consisteix en esbrinar quins acords (“coalicions”) són consistents amb el comportament racional. Quan els jugadors no poden comunicar-se entre ells (per raons legals, institucionals o d'altra mena), parlem de *jocs no-cooperatius*.

La figura 1.1 reproduïda del llibre de Bacharach (1976) representa l'estructura de la teoria de jocs (estàtica).

1.2 Exemples de jocs.

Veurem a continuació tres jocs que ens proporcionaran diferents intuïcions.

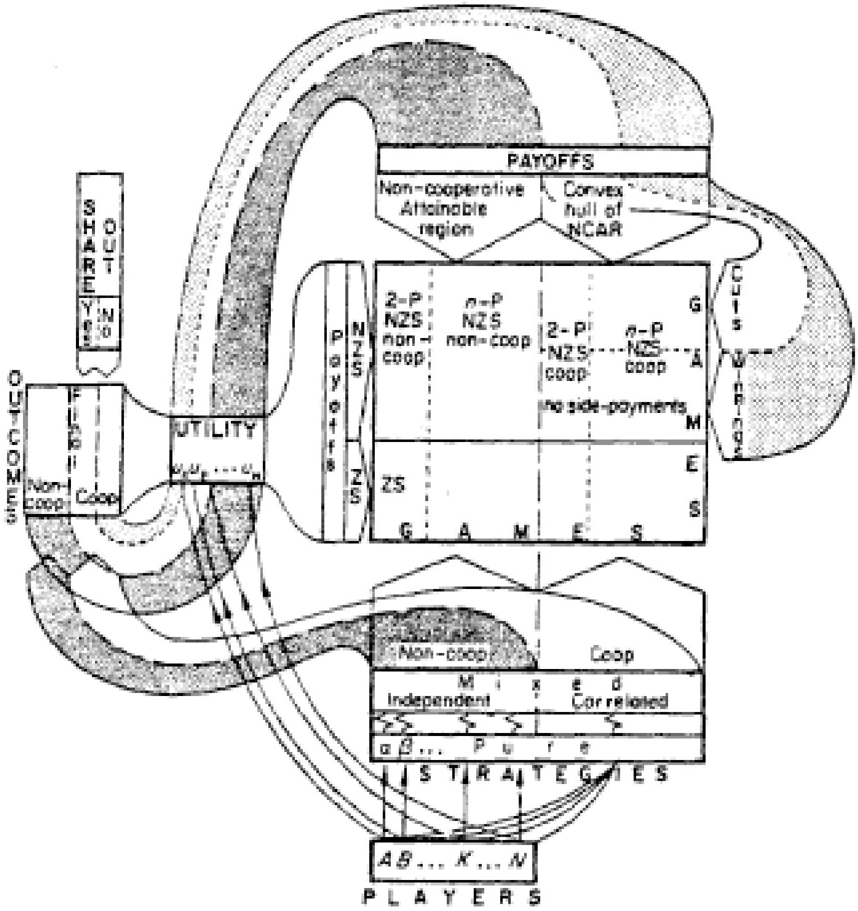

Figura 1.1: L'estructura de la teoria de jocs.

1.2.1 Exemple 1: Cara o creu.

Aquest és un joc prou conegut. Dues persones tiren una moneda a l'aire per decidir qui és el guanyador. Si surt cara guanya el primer jugador. Si surt creu, guanya el segon. En aquest joc no hi ha manera de trobar una estratègia òptima (guanyadora) per cap jugador. En realitat cada jugador sap que amb probabilitat 1/2 sortira cara i amb probabilitat 1/2 sortira creu. En conseqüència, la única manera de jugar aquest joc és anunciar amb probabilitat 1/2 cara (creu). Aquest comportament ens donara la intuïció adient quan parlem d'estratègies mixtes.

1.2.2 Exemple 2: El joc dels pirates.

En un vaixell pirata hi ha sis pirates que acaben d'obtenir un botí de 100 monedes d'or. Per repartir-se-les, ordenem el pirates per ordre d'edat, de manera que el pirata número 1 és el més vell, i el pirata número 6 és el més jove. Tots els pirates són racionals.

El mecanisme per repartir les monedes és el següent: el pirata número 6 fa una proposta de repartiment i es vota. Si la proposta obté al menys la meitat dels vots s'implementa la proposta. Si no, es tira el pirata número 6 per la borda (és menjat pels taurons) i el pirata número 5 fa una proposta. Aquesta es vota en les mateixes condicions, etc.

La proposta genèrica per un pirata parell (senar) consisteix en assignar una moneda al pirates parells (senars) més grans qu'ell, cap moneda als pirates senars (parells) i ell quedar-se amb la resta. Això és així perquè donat que una proposta necessita al menys $n/2$ vots (on n és el número de pirates en el vaixell), cada pirata parell (senar) només necessita repartir monedes entre els pirates parells (senars). La qüestió que ha de resoldre a continuació és quantes monedes ha de repartir entre els altres pirates parells (senars). Naturalment, aquest ha de sedr el mínim possible. És fàcil veure que amb una moneda per a cada un dels altres pirtes parells (senars) és suficient.

Quina proposta serà acceptada? La resposta a aquesta pregunta ens proporcionara una intuïció molt important sobre la inducció enrera. Considerem la taula 1.2 on representem diferents propostes pels diferents pirates. Recordem que tots els pirates són racionals i que tots coneixen el mecanisme per fer propostes.

Posem-nos en la situació del pirata número 6. Sap que necessita fer una proposta que tingui el recolzament de com a mínim tres col.legues més. Una possible proposta és donar una moneda als pirates parells i ell quedar-se amb 98 monedes. Aquesta proposta es correspon amb la darrera fila de la taula 1.2. Aconseguirà aquesta proposta els tres vots necessaris? Naturalment ell mateix vota a favor. Examinem doncs si els pirates 2 i 4 també voten a favor.

El pirata 4 només votara a favor si no espera poder fer ell mateix una proposta.

	1	2	3	4	5	6
1	100					
2	0	100				
3	1	0	99			
4	0	1	0	99		
5	1	0	1	0	98	
6	0	1	0	1	0	98

Taula 1.2: L'exemple dels pirates.

El pirata 2 també votara a favor si tampoc espera poder fer ell mateix la proposta. Així doncs, pensem en el pirata 2. Si mai te l'oportunitat de fer una proposta, aquesta sortira endavant perque el seu vot es suficient per obtenir la meitat dels vots. Ara be, perque el pirata 2 tingui l'oportunitat de fer una proposta ha de passar que la proposta del pirata 3 (i de la resta de pirates) es rebutji. Pero la proposta de tres segur que compta amb els vots dels pirates 1 i 3. El pirata 1 votara a favor perque ja sap que si vota en contra s'implementara la proposta del pirata 2 amb la que obté pitxor resultat que recolzant la proposta del pirata 3.

Ara be, perque el pirata 3 pugui fer una proposta ha de passar que la proposta del pirata 4 (i de la resta dels pirates) hagi estat rebutjada. Pero la proposta del pirata 4 comptara amb els vots dels pirates 2 i 4. El pirata 2 votara a favor perque, pel raonament anterior, sap que si ell vota en contra, el pirata 3 fara una proposta que s'implementara i que a ell li otorga un resultat pitxor que el que obté recolzant la proposta del pirata 4.

Ara be, perque el pirata 4 pugui fer una proposta ha de passar que la proposta del pirata 5 (i de la resta dels pirates) hagi estat rebutjada. Pero la proposta del pirata 5 comptara amb els vots dels pirates 1, 3 i 5. El pirata 3 votara a favor perque, pel raonament anterior, sap que si ell vota en contra, el pirata 4 fara una proposta que s'implementara i que a ell li otorga un resultat pitxor que el que obté recolzant la proposta del pirata 5. El pirata 1 votara a favor perque pels raonaments anteriors sap que ell mai tindra l'oportunitat de fer una proposta, i si vota en contra s'implementara la proposta del pirata 4 que li otorga pitxor resultat que l'assignat per la proposta del pirata 5.

Ara be, perque el pirata 5 pugui fer una proposta ha de passar que la proposta del pirata 6 hagi estat rebutjada. Pero la proposta del pirata 6 comptara amb els vots dels pirates 2, 4 i 6. El pirata 4 votara a favor perque, pel raonament anterior, sap que si ell vota en contra, el pirata 5 fara una proposta que s'implementara i que a ell li otorga un resultat pitxor que el que obté recolzant la proposta del pirata 6. El pirata 2 votara a favor perque pels raonaments anteriors sap que ell mai tindra l'oportunitat de fer una proposta, i si vota en contra s'implementara la proposta

A	B	C
x	z	y
z	x	x
y	y	z

Taula 1.3: L'exemple de les votacions.

	A	B	C	
1a votació	x	x	y	$\rightarrow$ x
2a votació	x	z	x	$\rightarrow$ x

Taula 1.4: Votacions honestes.

del pirata 5 que li otorga pitxor resultat que l'assignat per la proposta del pirata 6.

En conseqüència doncs, la proposta del pirata 6 comptara amb el recolzament dels pirates 2, 4 i 6 i s'implementara.

1.2.3 Exemple 3: Votació estratègica.

Imaginem una societat composada per tres individus A, B, C que han de votar si volen dedicar els seus impostos a construir un hospital (x), una escola (y) o no pagar impostos (z). Les preferències dels individus es mostren en la taula 1.3,

El sistema de votació és el següent: primer es vota sobre les propostes x i y. A continuació es vota entre la proposta guanyadora y z. La regla de la votació és la majoria simple. Aquest exemple ens donara intuïció sobre la capacitat de manipulació dels jugadors sobre el resultat de les votacions. Una conclusió immediata doncs és que es desitjable dissenyar sistemes de votació que no siguin manipulables de manera que els jugadors revelin honestament les seves preferències.

Si els jugadors voten d'acord amb les seves preferències, el resultat de les votacions seran els que es mostren en la taula 1.4,

Ara be, el jugador B pot anticipar aquest resultat i manipular la decisió final votant de forma diferent a les seves preferències per tal d'aconseguir el millor resultat per ell. Mirem les votacions de la taula 1.5,

	A	B	C	
1a votació	x	y	y	$\rightarrow$ y
2a votació	z	z	y	$\rightarrow$ z

Taula 1.5: Manipulació del jugador B.

	A	B	C	
1a votació	x	y	x	$\rightarrow$ x
2a votació	x	z	x	$\rightarrow$ x

Taula 1.6: Manipulació del jugador C.

Ara be, el jugador C també pot anticipar la manipulació del jugador B i votar de forma diferent com mostra la taula 1.6,

A partir d'aquí ja cap jugador pot millorar manipulant la votació (és un equilibri) però els jugadors B i C no revelen honestament les seves preferències amb la seva forma de votar.

1.3 Teoria de la decisió i teoria de jocs.

La teoria de jocs és part de la teoria de la decisió. Aquesta estudia la manera racional de presa de decisions. En la teoria de la decisió es considera que un agent té un problema de decisió si ha d'escollir una acció d'entre un conjunt d'alternatives possibles, i té una certa visió de les seves conseqüències. Aquest agent té preferències sobre les diferents conseqüències associades a les diferents accions i mira d'escollir l'acció que li permet obtenir la millor conseqüència possible d'acord amb les seves preferències.

Quan l'agent decisor *coneix* totes les conseqüències de totes les seves possibles accions, diem que l'agent té un problema de decisió en condicions de *certesa*. Si no coneix totes les conseqüències, diem que s'enfronta a un problema en condicions d'*incertesa*. En aquest cas, l'agent ha d'assignar *probabilitats* a les diferents conseqüències, i parlem 'un problema de decisió en condicions de *risc* (Luce i Raiffa (1957)) i deixem la noció d'incertesa pel cas on l'agent no és capaç d'assignar probabilitats als esdeveniments possibles.

La teoria de jocs, donat que tracta amb agents racionals, considera que qualsevol assignació de probabilitat ha de tenir un fonament racional. Nosaltres estudiarem situacions en les que els jugadors prenen decisions be en condicions de certesa, be en situacions de risc. En aquest darrer cas, l'assignació de probabilitat i la presa de decisions estarà governada per la teoria de l'utilitat esperada de Von Neumann i Morgenstern (1944).

1.4 La Teoria de l'Utilitat Esperada.

La majoria de decisions en la vida real es prenen sense tenir total control sobre els resultats de les decisions.[1] Per exemple, quan comprem accions a la Borsa de Valors no sabem si pujaran o baixaran; quan comprem un bitllet de loteria no sabem si guanyarem o perdrem; quan ens enamorem, no sabem si ens entendrem amb la nostra parella, etc. En entorns més econòmics, quan un empresari contracta un treballador no sap quina és la seva capacitat; quan decideix produir un be no esta segur de la demanda o del preu al que el podrà vendre.

En conseqüència qualsevol agent decisor ha d'acceptar un cert nivell d'incertesa sobre el resultat de les seves accions. Les preguntes importants són:

(1) Cóm afecta la incertesa a les relacions econòmiques?,

(2) Cóm és possible prendre decisions racionals en condicions d'incertesa?

1.4.1 Decisions en situacions de risc.

Per tal de poder formalitzar aquestes preguntes (i les seves respostes) *suposem* que tots els agents decisors poden definir la probabilitat de que un cert esdeveniment tingui efecte com a conseqüència d'una decisió. En altres paraules, suposem que els agents poden assignar una distribució de probabilitat sobre les diferents conseqüències d'una acció.

Per exemple, si l'acció es tirar una moneda a l'aire, les conseqüències poden ser cara o creu. Si surt cara guanya, si surt creu perd. El conjunt de resultats possibles és doncs, $\{g, p\}$ i la distribució de probabilitat $\{Pr(g), Pr(p)\}$ amb l'única condició $Pr(g) + Pr(p) = 1$.

En general, si el conjunt de resultats possibles és $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, la distribució de probabilitat ha de satisfer dues condicions:

i) $Pr(x_i) \geq 0 \, \forall i$,

ii) $\sum_{i=1}^{n} Pr(x_i) = 1$.

Amb aquest instrument (la distribució de probabilitat), podem interpretar $Pr(x_i) = 0$ com un esdeveniment impossible, i $Pr(x_i) = 1$ com un esdeveniment segur.

Definició 1.4 (Distribució de probabilitat). *Una distribució (simple) de probabilitat L sobre el suport X esta especificada per*

a) un conjunt, X, denominat suport de L,

[1] Aquesta secció és una adaptació de Mas-Colell et al. (1995, cap. 6B).

b) per cada element $x \in X$ un número $p(x) \geq 0$ tal que $\sum_{x \in X} p(x) = 1$.

El conjunt de distribucions (simples) de probabilitat sobre X el denotem per $\mathcal{L}$. Els elements $x \in X$ s'anomenen premis o resultats. Els elements $L \in \mathcal{L}$ s'anomenen loteries.

Exemple 1

Un consumidor, segons quina sigui la seva decisió pot obtenir una cistella de consum x_1 amb 10 Kg de patates i 2 Kg. de carn o be una altra cistella x_2 amb 4 Kg. de patates i 4 Kg. de carn. Així doncs, $x_1 = (10, 2)$ i $x_2 = (4, 4)$.

Una distribució de probabilitat L sobre el suport $X = \{x_1, x_2\}$ és per exemple, $p(x_1) = 1/3$, $p(x_2) = 2/3$.

Considerem ara un enfoc més abstracte abans de proposar més exemples.

El resultat d'una acció α pot ser el premi ω amb probabilitat p i el premi x amb probabilitat $1 - p$. Per tant, l'agent decisor quan pren l'acció α està escollint una *loteria* $L = [p(\omega), (1 - p)(x)]$.

Com podem assignar un valor numèric a una acció α de la que no coneixem el resultat (premi)?

Suposem que (d'alguna manera) l'agent decisor pot assignar números u_ω, u_x als esdeveniments segurs ω i x.

Definició 1.5 (Utilitat esperada). *El valor esperat o l'utilitat esperada de la loteria $L = [p(\omega), (1 - p)(x)]$ es defineix com $EL = pu_\omega + (1 - p)u_x$. Es a dir, el valor esperat és una mitja ponderada de les utilitats dels esdeveniments segurs on les ponderacions són les probabilitats.*

Exemple 2

Tirem una moneda. Si surt cara guanyem 1000 pts.; si surt creu paguem 1000 pts. Quin és el valor esperat de la loteria associada al joc?

- acció: tirar la moneda
- suport: $X = \{cara, creu\}$
- resultat: $u_{cara} = 1000$; $u_{creu} = -1000$
- distribució de probabilitat: $p(cara) = p(creu) = 1/2$
- loteria: $L = [p(cara), p(creu)]$
- valor esperat= $EL = 1/2(1000) + 1/2(-1000) = 0$.

Exemple 3

Considerem un examen de tipus test en el que cada pregunta té tres respostes alternatives a, b, c. Si la resposta és correcta s'obté 1 punt; si la resposta és equivocada s'obté -1/2 punt. Si no es respon s'obtenen 0 punts. Considerem ara un estudiant que s'enfronta a una pregunta de la que no sap la resposta. Quin és el valor esperat de respondre aleatòriament (suposem que la resposta correcta és a)?

- acció: respondre la pregunta
- suport: $X = \{a, b, c\}$
- resultat: $u_a = 1$; $u_b = u_c = -1/2$
- distribució de probabilitat: $p(a) = p(b) = p(c) = 1/3$
- loteria: $L = [p(a), p(b), p(c)]$
- valor esperat= $EL = 1/3(1) + 1/3(-1/2) + 1/3(-1/2) = 0$.

La idea del valor esperat es considerar que repetim l'experiment moltes vegades de manera que l'incertesa tendeix a desaparèixer. En termes de l'exemple 3, suposem que el nostre estudiant respon aquesta pregunta moltes vegades (infinites), sense aprendre res en el procés. Donat que no sap la resposta, $1/3$ de les vegades respondra a i obtindra 1 punt; $1/3$ de les vegades respondra b i obtindra $-1/2$ punt, i $1/3$ de les vegades respondra c i obtindra també $-1/2$ punts. Si ara sumem els punts obtinguts després de les T vegades (on T és un número arbitràriament gran) resulta que $T[(1/3)1 + (1/3)(-1/2) + (1/3)(-1/2)] = 0$.

Definició 1.6 (Utilitat esperada). *Considerem una loteria $L = [p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n)]$ on $x_1, \ldots, x_n$ són esdeveniments segurs i $p_1, \ldots, p_n$ és una distribució de probabilitat sobre $x_1, \ldots, x_n$, és a dir, $p_i \geq 0 \, \forall i$, i $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.*

Siguin $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$ una assignació de números reals als esdeveniments segurs $x_1, \ldots, x_n$.

El valor esperat (la utilitat esperada) de la loteria L és $EL = \sum_{i=1}^{n} p_i u_{x_i}$.

Podem representar la loteria L com un punt en el simplex $(n-1)$-dimensional $\Delta = \{p_i \in \mathbb{R}_+^n / p_1 + \cdots + p_n = 1\}$

Pel cas $n = 3$, podem representar gràficament la loteria tant en tres dimensions com en dues dimensions (que resulta més convenient). La figura 1.2 mostra aquesta representació.

Cada vèrtex del simplex representa una loteria degenerada on un dels esdeveniments és cert i els altres dos impossibles.

Les loteries que hem vist fins ara s'anomenen loteries simples perquè el resultat que pot sorgir es coneix amb certesa (i.e. el valor esperat). Una variant més

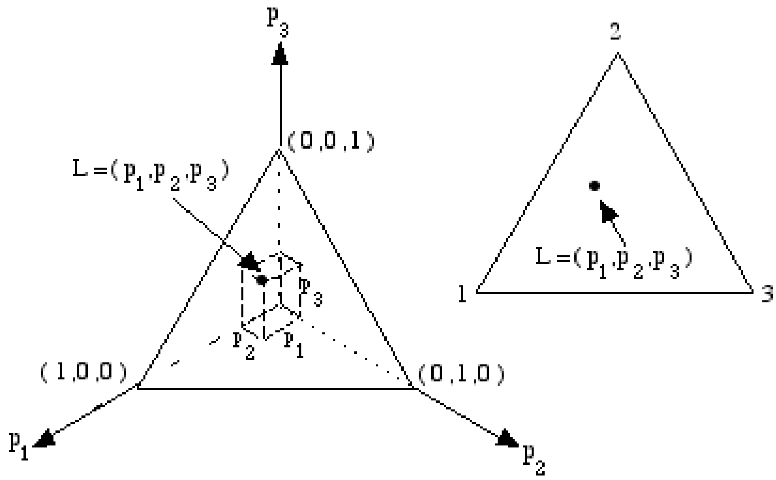

Figura 1.2: Representació del simplex en dos i tres dimensions.

general de loteries són les *loteries compostes* on els resultats de les loteries són a la seva vegada loteries simples. Formalment,

Definició 1.7 (Loteries compostes). *Sigui* $L_k = [p_{1k}(x_{1k}), \ldots, p_{nk}(x_{nk})]$*,* $k = 1, \ldots, K$*, un conjunt de loteries simples. Sigui* $\alpha_k \geq 0$ *amb* $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$*, una distribució de probabilitat definida sobre les loteries* L_k*. Definim una loteria composta* $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ *com una distribució de probabilitat que assigna a la loteria* L_k *la probabilitat* α_k*. Formalment,*

$$L = \left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_{k1}, \ldots, \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_{ki}, \ldots, \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_{kn} \right)$$

Exemple 4

Considerem un suport $X = \{x, y\}$ per dues loteries simples L_1, L_2 amb probabilitats p i p':

$$L_1(p, x, y) = [p(x), (1-p)(y)]$$
$$L_2(p', x, y) = [p'(x), (1-p')(y)].$$

Donada una distribució de probabilitat α, podem construir una loteria composta

$$L[\alpha, L_1(p, x, y), L_2(p', x, y)] = \big[\alpha[p(x), (1-p)(y)], (1-\alpha)[p'(x), (1-p')(y)]\big]. \tag{1.1}$$

Naturalment, $L = (\alpha L_1, (1-\alpha) L_2) \in \Delta$. Esquemàticament, la loteria composta la podem representar com mostra la figura 1.3.

A la seva vegada, per cada loteria composta es pot calcular la corresponent *loteria reduïda*, que es una loteria simple que genera la mateixa distribució de

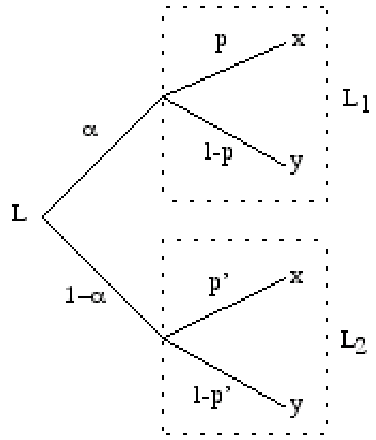

Figura 1.3: Representació d'una loteria composta.

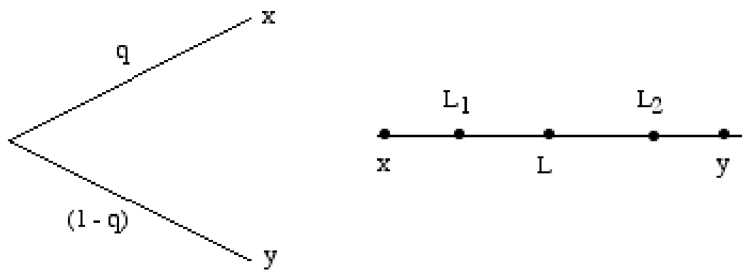

Figura 1.4: Representació de la loteria reduïda.

probabilitat sobre els resultats. Aquesta nova distribució de probabilitat, $[q,(1-q)]$ es calcula associant a q el producte de la probabilitat amb la que cada loteria L_k apareix (i.e. α_k) per la probabilitat p_{kx} amb la que el resultat x apareix en la loteria L_k i sumant sobre k. Paral.lelament, assigna la probabilitat $(1-q)$ al producte de la probabilitat amb la que cada loteria L_k apareix (i.e. α_k) per la probabilitat p_{ky} amb la que el resultat y apareix en la loteria L_k i sumant sobre k.

En l'exemple 4, a partir de (1.1) l'esdeveniment x apareix amb probabilitat $(\alpha p + (1-\alpha)p')$ i l'esdeveniment y apareix amb probabilitat $[\alpha(1-p) + (1-\alpha)(1-p')]$, de manera que podem construir una distribució de probabilitat

$$\begin{aligned} q &= \alpha p + (1-\alpha)p' \\ 1-q &= \alpha(1-p) + (1-\alpha)(1-p') \end{aligned}$$

per obtenir la loteria reduïda $L(q,x,y) = [q(x),(1-q)(y)]$. La figura 1.4 il.lustra aquesta construcció. La loteria reduïda es troba en un punt intermig entre les loteries L_1 i L_2. Aquesta estructura lineal de l'espai de loteries és crucial en la teoria de decisió amb risc.

1.4.2 Decisions òptimes en situació de risc

Fins ara hem estudiat com prendre decisions en situacions de risc. Cada acció possible genera una loteria. Com podem comparar les loteries (els resultats de les diferents accions) per tal de saber quina és la millor acció per l'agent decisor?

Per respondre, necessitem dotar a l'agent de *preferències sobre les loteries*.

Per tal de fer comparacions, hem de començar dient que solament les loteries reduïdes són rellevants per l'agent decisor. El fet de que la distribució de probabilitat sobre els premis sigui el resultat d'una loteria simple o d'una loteria composta és irrellevant. En altres paraules, cóm es generin les loteries no és important. L'únic important són la distribució de probabilitat i els premis.

Denotem per $\mathcal{L}$ l'espai de loteries i per $\succeq$ les preferències sobre $\mathcal{L}$. Ara necessitem un conjunt d'axiomes que ens permetin representar les preferències $\succeq$ sobre $\mathcal{L}$ mitjançant una funció $\mathcal{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ tal que, $\forall (L, L')\ L \succeq L' \Longleftrightarrow U(L) \geq U(L')$.

Aquesta representació es coneix com la *propietat de l'utilitat esperada* i es deu a Von Neumann i Morgenstern (1944).

Si podem trobar un conjunt de supòsits (axiomes) que permetin tal representació, podrem transformar el problema de l'agent de decidir l'acció associada a la millor loteria (la més preferida) en un problema de maximització d'utilitat sobre loteries. Aquest és un problema més senzill de resoldre perquè podem utilitzar les eines del càlcul diferencial (cfr. representació de les preferències del consumidor per una funció d'utilitat).

Axiomes sobre $\succeq$ en $\mathcal{L}$

Axioma 1.1 (Transitivitat). *$\forall (L, L', L'') \in \mathcal{L}$ si $L \succeq L'$ i $L' \succeq L''$ aleshores $L \succeq L''$.*

Axioma 1.2 (Associació positiva). *$\forall (x, y) \in X$ tal que $x \succ y$. Aleshores $[p(x), (1-p)(y)] \succ [q(x), (1-q)(y)] \Longleftrightarrow p > q$.*

Axioma 1.3 (Continuïtat). *$\forall (x, y, z) \in X$ suposem $x \succeq y \succeq z$. Aleshores, $\exists p(x)$ tal que $y \sim [p(x), (1-p)(z)]$.*

Axioma 1.4 (Loteries compostes). *$\forall (x, y) \in X$ i $\forall (p, q, r) \in \mathcal{L}$ considerem les loteries simples*

$$L_1 = [q(x), (1-q)(y)]$$
$$L_2 = [r(x), (1-r)(y)]$$

i considerem la loteria composta

$$L = [pL_1, (1-p)L_2] = \big[p[q(x), (1-q)(y)], (1-p)[r(x), (1-r)(y)]\big].$$

Definim ara una loteria $[s(x),(1-s)(y)]$ *on*

$$s(x) \equiv pq + (1-p)r$$
$$(1-s)(y) \equiv p(1-q) + (1-p)(1-r).$$

Aleshores, $L \sim [s(x),(1-s)(y)]$.

Axioma 1.5 (Independència). $\forall(x,y,z) \in X$ *i* $p \in (0,1)$*, si* $x \sim y$ *aleshores* $[p(x),(1-p)(z)] \sim [p(y),(1-p)(z)]$.

Interpretació dels axiomes

L'axioma de *transitivitat* és força dèbil. Diu senzillament que si l'agent fa comparacions entre loteries dos a dos, ho ha de fer de forma consistent.

L'axioma d'*associació positiva* diu dues coses. En primer lloc, per qualsevol parell de premis que no siguin indiferents, l'agent pot comparar qualsevols dues loteries que els impliquin (loteries que poden ser degenerades). En segon lloc, l'axioma ens diu que l'agent prefereix la loteria que associa la probabilitat més alta al premi més preferit.

L'axioma de *continuïtat* és una mica més exigent en termes de comparabilitat de premis que l'axioma 2. Pensem, en particular, en el cas $x \succ y \succ z$ i considerem loteries entre x i z amb p (la probabilitat del premi x) augmentant gradualment de zero a 1. Aquest augment de p fa x més i més desitjable (a partir de l'axioma 2). Per tant hi ha d'haver un valor de p que faci a la loteria indiferent en respecte al premi (segur) y.

L'axioma 4 ja l'hem comentat abastament abans.

Finalment, l'axioma 5 és el més controvertit. Ens diu que si dos premis (segurs o aleatoris) són equivalents, aleshores fraccions d'aquests premis són també equivalents quan apareixen en loteries amb d'altres premis. En altres paraules, si combinem dos premis (segurs o aleatoris) amb un tercer, l'ordre de preferències de les dues loteries que apareixen no depèn (és independent) del tercer premi. Aquest axioma sovint es presenta de forma que els premis són loteries. En aquest cas, podem reformular l'axioma com

Axioma 1.6 (Independència). $\forall(L,L',L'') \in \mathcal{L}$ *i* $p \in (0,1)$,

$$L \succeq L' \Longleftrightarrow pL + (1-p)L'' \succeq pL' + (1-p)L''.$$

1.4.3 El teorema de l'Utilitat Esperada

Teorema 1.1 (Utilitat Esperada (Von Neumann-Morgenstern, 1944)). *Si les preferències d'un agent decisor satisfan els axiomes (1) a (5), aleshores existeix una funció* $\mathcal{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *que representa aquestes preferències i satisfà la propietat de l'utilitat esperada.*

Definició 1.8 (Propietat de l'Utilitat Esperada). *Diem que la funció d'utilitat* $\mathcal{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *satisfà la propietat de l'utilitat esperada si* $\forall L(x, y; p) \in \mathcal{L}$ *existeixen números* u_x *i* u_y *tals que* $\mathcal{U}(L) = pu_x + (1 - p)u_y$*.*

Proposició 1.1. *Sigui* $\mathcal{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *una funció d'utilitat per* $\succeq$ *sobre* $\mathcal{L}$*. Aleshores,* $\widetilde{\mathcal{U}} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *és una altra funció d'utilitat per* $\succeq$ *sobre* $\mathcal{L}$ *si i només si podem expressar* $\widetilde{\mathcal{U}}$ *com una transformació afí positiva de* $\mathcal{U}$*.*

Definició 1.9 (Transformació afí positiva). *Siguin* $f : X \to \mathbb{R}$ *i* $g : X \to \mathbb{R}$ *dues funcions reals. Diem que* g *és una transformació afí positiva de* f *si* $\exists a \in \mathbb{R}$ *i* $b \in \mathbb{R}_{++}$ *tal que* $g(x) = a + bf(x)$*.*

De la proposició 1 es desprén un corolari que diu,

Corolari 1.1. *Si podem representar les preferències d'un agent mitjançant una funció d'utilitat, la representació d'aquestes preferències és independent de l'origen i de les unitats de mesura.*

Per exemple, suposem que tenim una situació amb varis premis monetaris $x \in [m_1, m_2]$ i la funció d'utilitat $\mathcal{U}$ assigna $u(m_1) = 0$, $u(m_2) = 1$. Suposem ara que volguéssim tenir una funció d'utilitat diferent $\widetilde{\mathcal{U}}$ que assignés $u'(0) = 0$, $u'(1000) = 1$. Aleshores podem trobar valors a i b tals que

$$\begin{aligned} 0 &= a + bu(0), \\ 1 &= a + bu(1000). \end{aligned}$$

Aquests valors són

$$a = \frac{-u(0)}{u(1000) - u(0)}; \qquad b = \frac{1}{u(1000) - u(0)}.$$

Les funcions que satisfan els axiomes (1)-(5) s'anomenen *Funcions d'utilitat esperada de Von Neumann-Morgenstern*.

Una propietat important de les funcions d'utilitat esperada de Von Neumann-Morgenstern és la següent:

Lema 1.1. *El mapa de corbes d'indiferència d'una funció d'utilitat esperada de Von Neumann-Morgenstern esta format per línies rectes paral.leles.*

Demostració. Considerem tres premis $(x, y, z) \in X$. Volem demostrar que quan representem el mapa de corbes d'indiferència en el simplex, aquest es del tipus que mostra la figura 1.5 on la fletxa representa la direcció de creixement de la satisfacció.

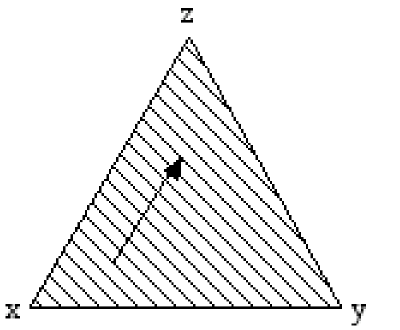

Figura 1.5: Mapa de corbes d'indiferència.

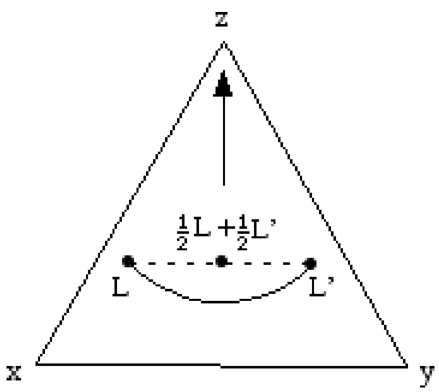

Figura 1.6: Linealitat de les corbes d'indiferència.

Per demostrar-ho procedirem en dues etapes. Primer demostrarem que les corbes d'indiferència has de ser línies rectes. A continuació demostrarem que han de ser paral.leles.

(a) Les corbes d'indiferència són rectes si $\forall(L, L'),\ \ L \sim L'$ implica $pL + (1-p)L' \sim L\ \forall p \in [0,1]$. Per verificar que això es així, considerem una corba d'indiferència que no sigui recta com en la figura 1.6 (on, com abans, la fletxa representa la direcció de creixement de la satisfacció).

Observem que $L \sim L'$ però $(1/2)L + (1/2)L' \succ L$. Això és equivalent a dir que

$$\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L' \succ \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L, \tag{1.2}$$

però donat que $L \sim L'$, l'axioma d'independència (axioma 5) ens diu que s'ha de verificar

$$\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L' \sim \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L,$$

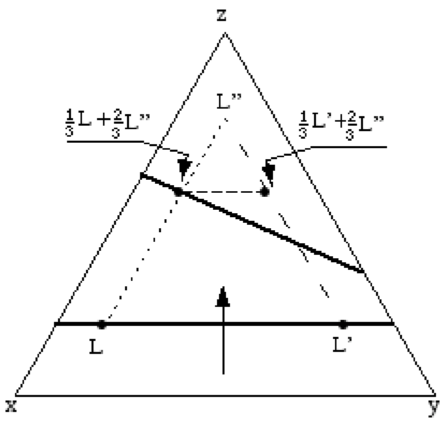

Figura 1.7: Paral.lelisme de les corbes d'indiferència.

el que és contradictori amb (1.2), de manera que podem concloure que les corbes d'indiferència han de ser línies rectes.

(b) Ara hem de demostrar que són paral.leles. Considerem la figura 1.7 en la que representem dues corbes d'indiferència rectes però no paral.leles.

En aquest exemple $L \succeq L'$ però

$$\frac{1}{3}L + \frac{2}{3}L'' \succeq \frac{1}{3}L' + \frac{2}{3}L''$$

no es satisfà per L''. En conseqüència, el mapa de corbes d'indiferència ha d'estar format per línies rectes paral.leles. □

1.4.4 Valoració de la Teoria de l'Utilitat Esperada

La teoria de l'utilitat esperada te dues avantatges. La primera és tècnica, la segona normativa.

En l'aspecte tècnic, l'utilitat esperada resulta molt convenient analíticament. Es molt fàcil treballar amb utilitats esperades i molt difícil fer-ho sense. D'aquí l'èxit en l'us de l'utilitat esperada en economia. Veurem una de les principals aplicacions quan parlem de l'aversió al risc.

En l'aspecte normatiu, l'utilitat esperada pot proporcionar ajut en la presa de decisions. Veiem-ho amb un exemple.

Un individu no és capaç d'esbrinar les seves preferències entre les dues loteries L i L' que es mostren en la figura 1.8. Ambdues loteries són molt properes entre si i les diferències en probabilitats massa petites per ser comprensibles. Si el nostre individu pensa que les seves preferències han de satisfer els axiomes (1)-(5), pot

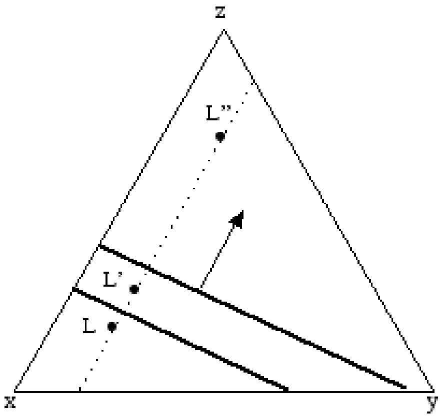

Figura 1.8: Exemple.

considerar una tercera loteria L'', que es troba sobre la mateixa recta que uneix L i L'. La loteria L'' pot no ser factible per l'individu, però si pot determinar que $L'' \succ L$ aleshores pot determinar que $L' \succ L$. Això és així perquè si $L'' \succ L$, hi ha una corba d'indiferència separant ambdues loteries, com a la figura, i donat que sabem que les corbes d'indiferència són línies rectes paral.leles, també ha d'haver una corba d'indiferència que separi L i L', de manera que $L' \succ L$.

Aquests elements d'ajut a la presa de decisions de la teoria de l'utilitat esperada no impedeix que presenti dificultats.

Una primera dificultat va estar presentada per Allais (1953) i es coneix com la *paradoxa d'Allais*. Suposem que un individu s'enfronta a tres possibles premis monetaris: el primer premi són 2,500,000.- pts; el segon premi són 500,000.- pts y el tercer premi són zero pessetes. L'individu s'enfronta a dos escenaris.

El primer consisteix es escollir entre dues loteries L_1 i $L_1^{'}$ definides per $L_1 = (0, 1, 0)$ y $L_1^{'} = (.10, .89.01)$.

En el segon escenari ha d'escollir entre dues altres loteries L_2 i $L_2^{'}$ definides per $L_2 = (0, .11, .89)$ y $L_2^{'} = (.10, 0, .90)$. Aquestes quatre loteries es representen en la figura 1.9. Per representar les loteries notem que podem reescriure $L_1^{'} = L_1 + (.10, -.11, .01)$ i $L_2^{'} = L_2 + (.10, -.11, .01)$

Davant d'aquesta situació i d'acord amb l'evidència empírica, els individus manifesten unes preferències

$$L_1 \succ L_1^{'}$$
$$L_2^{'} \succ L_2$$

La primera diu que un individu prefereix 500,000 pts. segures que jugar a una loteria en la que amb una probabilitat del 10% pot guanyar 2,500,000, amb probabilitat 1% pot no guanyar res, i amb probabilitat 89% pot guanyar les mateixes

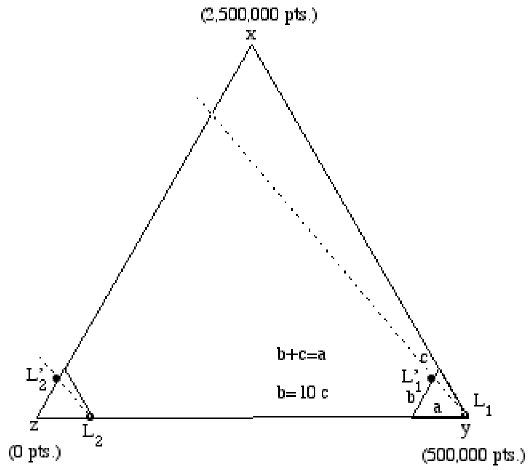

Figura 1.9: La paradoxa d'Allais.

500,000 pts.

La segona diu que l'individu prefereix obtenir 2,500,000 pts. amb una probabilitat del 10% (i res amb una probabilitat del 90%) a obtenir 500,000 pts. amb una probabilitat del 11% (i res amb una probabilitat del 89%).

Aquestes ordenacions, tot i que semblen força raonables, no són consistents amb els axiomes de la teoria de l'utilitat esperada. Veiem-ho, primer, gràficament. Les rectes que uneixen L_1 a $L_1^{'}$ i L_2 a $L_2^{'}$ són paral.leles. Donat que l'individu declara que $L_1 \succ L_1^{'}$, una corba d'indiferència paral.lela ens diu que $L_2 \succ L_2^{'}$. Per tant escollir L_1 i $L_2^{'}$ és inconsistent.

Formalment, suposem que tenim una funció d'utilitat esperada de Von Neumann-Morgenstern. Siguin u_1, u_2 i u_3 els valors que la funció d'utilitat assigna als tres premis. Aleshores,

$$L_1 \succ L_1^{'} \text{ implica } u_2 > .1u_1 + .89u_2 + .01u_3.$$

Sumant $(.89u_3 - .89u_2)$ a ambdues bandes de la desigualtat anterior obtenim,

$$.11u_2 + .89u_3 > .1u_1 + .9u_3 \text{ és a dir } L_2 \succ L_2^{'}.$$

El lector interessat en aquesta i altres paradoxes de la teoria de l'utilitat esperada pot consultar Mas-Colell et al. (1995, cap. 6B)

1.5 L'Aversió al Risc.

1.5.1 Un enfoc intuïtiu.

En moltes situacions econòmiques, el resultat de la interacció entre els agents es pot expressar en diners (beneficis i/o costos per les empreses, renda disponible pels consumidors, recaptació d'impostos, polítiques de subvencions, etc.).[2] En aquestes circumstancies, sovint observem una actitud molt prudent del agents davant de situacions de risc. Aquest comportament l'anomenem *aversió al risc*.

Formalment, aquesta aversió al risc es manifesta en la forma com traduïm els elements del conjunt X d'esdeveniments en els nḿeros u_{x_i}. Aquesta transformació es fa mitjançant una *funció d'utilitat de von Neumann-Morgenstern*, $U(x)$. Veurem que l'aversió al risc està relacionada amb la concavitat d'aquesta funció.

Considerem la situació següent. A un individu se li ofereix participar en un joc que consisteix en tirar una moneda a l'aire. Si surt cara guanya 100 euros. Si surt creu no guanya res. El valor esperat d'aquest joc és 50 euros. Naturalment, com aquesta és una situació sense risc per l'individu, estarà encantat de participar. Ara suposem que se li ofereix escollir entre rebre 50 euros amb certesa i jugar el joc anterior (McMillan (1992), p. 34). Què fara el nostre individu?

Per respondre hem d'analitzar l'actitud de l'individu davant del risc. Si la resposta és "prefereixo els 50 euros segurs"diem que l'individu és *risc avers* o que te *aversió al risc*. Aquesta actitud respon a la dita castellana de "más vale pájaro en mano que ciento volando". Si l'individu es declara indiferent entre ambdues situacions parlem de *neutralitat davant del risc*. Finalment, si l'individu prefereix tirar la moneda, estem davant d'un individu amb *preferència pel risc*.

Cóm calculem l'aversió al risc d'un individu? El concepte bàsic que hem de definir és la *prima de risc*.

Definició 1.10 (Prima de risc). *La prima de risc és la quantitat de diners a que el jugador esta disposat a renunciar per tal d'evitar la situació de risc.*

Pensem en un individu que contracta una assegurança d'incendi per casa seva. La quantitat de diners que esta disposat a pagar per evitar el risc de perdre la casa en cas d'incendi és precisament la prima de risc d'aquest individu davant d'aquesta situació particular de risc.

Quan la prima de risc és positiva, el jugador és avers al risc. Com més gran és aquesta quantitat, més aversió al risc manifesta l'individu. Si la prima de risc és zero, l'individu és neutral al risc. Finalment, si la prima de risc és negativa (i.e. l'individu esta disposat a pagar per poder jugar), l'individu manifesta preferència

[2]Aquesta secció és una adaptació de Mas-Colell et al (1995, cap. 6C). El lector interessat pot consultar aquest capítol per una visió completa del tema.

pel risc. Exemples d'aquestes situacions són el que s'anomenem "fugides cap endavant"d'individus davant de situacions molt compromeses.

Es important senyalar que la prima de risc esta influenciada per dos factors addicionals. El primer factor (objectiu) és el nivell de risc de la situació a la que s'enfronta l'individu. Així, la prima de risc d'un individu que desenvolupa una activitat d'alt risc (esports d'aventura) serà més alta que la d'un altre individu sedentari. El segon factor (subjectiu) és el valor que l'individu dona a la situació objecte de risc. Normalment, la prima de risc serà més alta com més alta sigui la valoració. Una casa valorada en un milió d'euros en una zona d'inundacions tindrà una prima més alta que una casa de cent-mil euros en la mateixa zona.

Resumint doncs, un individu té diferents primes de risc davant de situacions de risc diferents, i diferents individus davant de la mateixa situació de risc tenen diferents primes de risc.

La pròpia existència de companyies d'assegurances és una manifestació de l'aversió generalitzada al risc dels individus en les societats modernes (apart de les assegurances obligatòries d'infermetat, vehicles, etc.). Precisament el problema fonamental que miren de resoldre les companyies asseguradores és definir el preu pel servei d'assegurança més ajustat possible a la prima de risc de l'individu. Si el preu és superior, l'individu refusara l'assegurança; si el preu és inferior, l'individu s'apropia d'una part de l'excedent; si el preu és precisament la prima de risc, la companyia aconsegueix apropiar-se de tot l'excedent de l'individu i així maximitza el benefici sobre aquest contracte d'assegurança. Aquesta relació entre el preu de l'assegurança i la prima de risc de l'individu fa que, abusant llenguatge, s'anomeni al preu de l'assegurança precisament la prima de l'assegurança.

1.5.2 Definicions.

Per ser una mica més precisos, sovint observem que els individus prefereixen una quantitat de diners de y €amb certesa que una loteria que li permet obtenir una quantitat superior $y + \delta$ amb probabilitat p i una quantitat inferior $y - \gamma$ amb probabilitat $1 - p$, on δ i γ són quantitats arbitràries.

Definició 1.11 (Aversió al risc). *Diem que un agent és avers al risc si enfrontat a l'alternativa d'una loteria arbitraria sobre una quantitat de y € o d'una altra loteria degenerada que li assigna les y euros amb certesa, prefereix l'alternativa certa a la probable. Formalment,*

$$y \succ L \stackrel{\text{def}}{=} [p(y + \delta), (1 - p)(y - \gamma)], \tag{1.3}$$

on $p \in (0, 1),\ \delta > 0$ *i* $\gamma > 0$.

A partir d'aquesta definició en podem derivar dues més:

Definició 1.12 (Neutralitat davant del risc). *Diem que un agent és neutral al risc si es indiferent entre una loteria arbitraria sobre una quantitat de y € i una altra loteria degenerada que li assigna les y euros amb certesa. Formalment,*

$$y \sim L \stackrel{\text{def}}{=} [p(y+\delta), (1-p)(y-\gamma)], \tag{1.4}$$

on $p \in (0,1),\ \delta > 0$ *i* $\gamma > 0$.

Definició 1.13 (Preferència pel risc). *Diem que un agent és amant del risc si enfrontat a l'alternativa d'una loteria arbitraria sobre una quantitat de y € o d'una altra loteria degenerada que li assigna y euros amb certesa, prefereix l'alternativa probable a la certa. Formalment,*

$$y \prec L \stackrel{\text{def}}{=} [p(y+\delta), (1-p)(y-\gamma)], \tag{1.5}$$

on $p \in (0,1),\ \delta > 0$ *i* $\gamma > 0$.

Naturalment, perquè les alternatives a les que s'enfronta l'agent siguin comparables, hem de suposar que el valor monetari esperat de la loteria L és precisament y. Si expressem les preferències de l'agent amb una funció d'utilitat VNM, podem reescriure (1.3) com

$$u(y) > Eu(L),\ \forall L \tag{1.6}$$

que ens diu que l'utilitat de l'esdeveniment cert y es superior a l'utilitat esperada de la loteria L. Podem procedir de forma similar amb (1.4) i (1.5).

L'expressió (1.6) es coneix com la *desigualtat de Jensen*, i defineix la propietat de concavitat d'una funció (com veurem mes aball).

1.5.3 Aversió al risc i prima de risc.

Considerem un agent avers al risc. Les seves preferències satisfan doncs (1.6). Per continuïtat de la funció d'utilitat esperada, ha d'haver una quantitat de diners $y^* < y$ tal que l'individu estigui indiferent entre y^* i la loteria L. Aquest número y^* s'anomena l'*equivalent cert* de la loteria L.

Podem ara calcular la diferència, en termes relatius, entre y i y^* com,

$$\frac{y - y^*}{y} \stackrel{\text{def}}{=} \rho.$$

Aquesta diferència ρ s'anomena la *prima de risc* de la loteria L. Ens diu quant estaria l'agent disposat a pagar per evitar la situació de risc. En altres paraules, contractar una assegurança és un acte d'aversió al risc: a canvi del preu de l'assegurança (la prima ρ) l'agent s'enfronta a una situació amb certesa a canvi d'una situació incerta (e.g. assegurança d'accidents, d'incendi, d'infermetat, de robatori, etc.)

Com és natural, la prima de risc per un agent avers al risc és positiva. Un raonament paral.lel ens faria concloure que la prima de risc per un agent neutral al risc és zero, i per un amant del risc és negativa.

L'aversió al risc *no* és un concepte teòric. Es una observació empírica. L'aversió d'un agent davant de situacions de risc està afectada per molts factors: econòmics, socials, psicològics, etc.

Un tema interessant és esbrinar els factors que determinen la prima de risc ρ.

L'observació empírica ens diu que (normalment), donada una quantitat de diners y amb certesa i uns resultats de la loteria w i z, la prima de risc ρ és menor com més riquesa té l'agent. Aquest fenomen s'anomena *aversió al risc decreixent*, que també es pot expressar dient que la prima de risc sobre una loteria depèn inversament de quina és la quantitat en joc en respecte a la riquesa personal (esperada). Si la funció d'utilitat $u(\cdot)$ és dues vegades contínuament diferenciable, es pot demostrar que

$$\rho = \frac{1}{2}\left|\frac{u''}{u'}\right| \times \text{Variancia de la desviació relativa del resultat en respecte a la mitjana } w+y.$$

Aquest producte també s'anomena *grau relatiu d'aversió al risc*. Notem que $\left|\frac{u''}{u'}\right|$ és una mesura de la corbatura de la funció d'utilitat. D'acord amb el resultat de l'aversió al risc decreixent, deuríem esperar que els agents més pobres tinguessin una funció d'utilitat més còncava que els agents més rics.

1.5.4 Aversió al risc i concavitat de la funció d'utilitat.

Com hem avançat més amunt, l'aversió al risc és equivalent a que la funció d'utilitat de l'agent sigui còncava, o en altres paraules, que l'agent tingui utilitat marginal decreixent del diner.

Considerem la Figura 1.10, on en l'eix d'abscisses mesurem diner i en l'eix d'ordenades el nivell d'utilitat (VNM).

Considerem un agent que ha de decidir entre una quantitat de diners segura y i una loteria que amb probabilitat p li assigna una quantitat de diners w i amb probabilitat $(1-p)$ li assigna z, i.e. $L = [p(w), (1-p)(z)]$.

Si l'agent és avers al risc, d'acord amb (1.6), $u(y) > Eu(L) = pu_w + (1-p)u_z$, com es reflecteix a la Figura 1.10. Quan les diferències entre w, y, z són petites (infinitesimals) l'aversió al risc vol dir que l'utilitat marginal és decreixent al voltant de la quantitat segura y, és a dir $u''(y) < 0$.

Podem aprofitar la Figura 1.10 per representar y^*, l'equivalent cert de la loteria L.

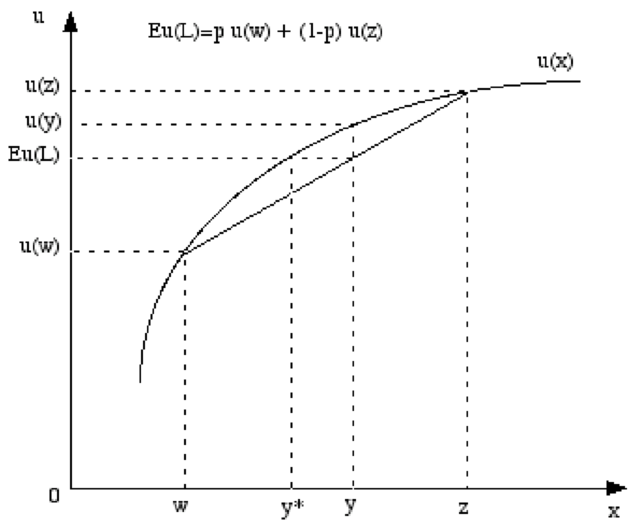

Figura 1.10: Aversió al risc i concavitat.

Es fàcil construir l'argument per associar la neutralitat al risc amb una funció d'utilitat lineal, i la preferència pel risc per una funció d'utilitat convexa. La Figura 1.11 il.lustra l'argument.

1.6 Representació d'un joc.

L'anàlisi d'un joc comença amb l'especificació del model que descriu el joc. Si l'estructura del model és massa senzilla estarem ignorant aspectes importants de la situació de conflicte que volem estudiar. Si l'estructura del model és massa complicada, aspectes laterals poden impedir l'identificació de elements fonamentals. Per evitar aquests extrems hi ha dues formes generals de representació d'un joc la *forma extensiva* i la *forma normal o estratègica*.

La forma extensiva és l'estructura més rica que utilitzarem per representar un joc. La forma normal (o forma estratègica) és conceptualment més senzilla i per molts aspectes de l'anàlisi del joc resulta més convenient. En general es considera que la forma normal es deriva de la forma extensiva.

1.6.1 La forma extensiva d'un joc.

Seguint a Myerson (1991), per introduir la forma extensiva d'un joc considerem un joc de cartes senzill de dos jugadors. El joc és el següent:

1. A l'inici cada jugador posa 1 euro en un pot.

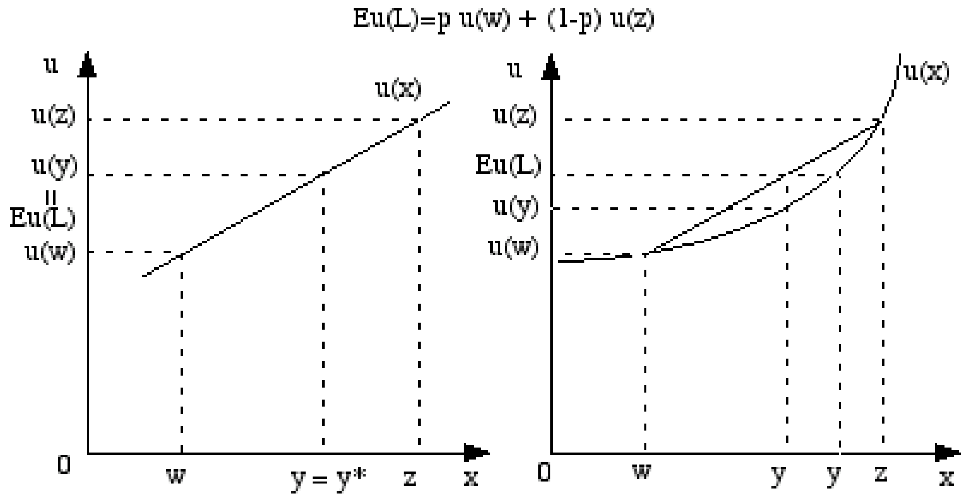

Figura 1.11: Risc i utilitat.

2. A continuació, el jugador 1 agafa una carta d'una baralla de cartes franceses que prèviament ha estat remenada. El jugador 1 mira de forma privada la carta i decideix si continuar o aturar el joc.

   Si l'atura el joc acaba. En aquest cas, ensenya la carta al jugador 2. Si la carta és vermella (cors o diamants) el jugador 1 agafa els diners del pot. Si la carta és negra (pics o trèvol) el jugador 2 agafa els diners.

   Si el jugador 1 decideix continuar el joc, torna a posar 1 euro al pot i deixa jugar al jugador 2.

3. El jugador 2 ha de decidir si posa 1 euro al pot o no. Si el jugador 2 decideix no posar 1 euro al pot el joc s'acaba i el jugador 1 agafa els diners del pot.

   Si el jugador 2 decideix posar 1 euro en el pot, després de posar-lo, el jugador 1 ensenya la carta al jugador 2 i el joc s'acaba. Si la carta és vermella el jugador 1 agafa els diners del pot. Si la carta és negra el jugador 2 agafa els diners.

La Figura 1.12 representa el joc.

Aquest és un diagrama en arbre composat de nusos i branques que representa les regles i resultats del joc. En altres paraules, ens diu *qui* pot decidir, *què* pot decidir, *quan* pot decidir, i *quant* pot obtenir com resultat.

Aquest diagrama en arbre te cinc elements:

(i) l'arrel (el nus inicial), que representa l'inici del joc;

(ii) els nusos de decisió, que indiquen quin jugador ha de prendre una decisió;

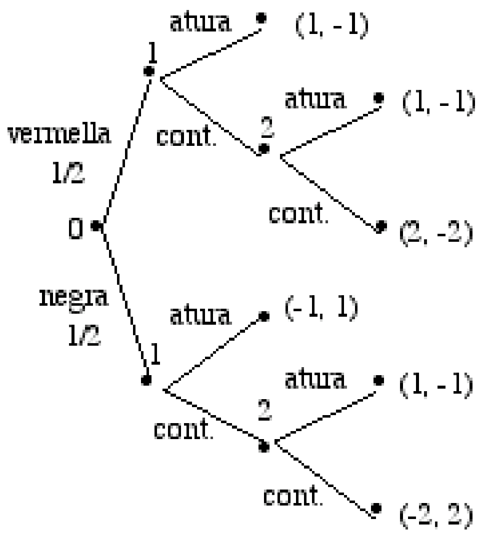

Figura 1.12: La forma extensiva del joc.

(iii) les branques, que representen les decisions a l'abast del jugador;

(iv) els nusos terminals, que representen situacions on s'acaba el joc i indiquen els pagaments per a cada jugador;

(v) el conjunt d'informació de cada jugador en cada nus de decisió (veure la figura 1.13 més aball).

La seqüència de branques corresponents a les decisions dels jugadors s'anomena el *desenvolupament del joc*. L'objectiu de l'anàlisi del joc és precisament predir el desenvolupament del joc.

Considerem ara els jocs representats (en forma extensiva) en la figura 1.13.

Aquest exemple ens permet ocupar-nos del darrer element de la forma extensiva que encara no hem comentat. Els *conjunts d'informació*. Sempre que un jugador es troba en un nus de decisió hem d'especificar de quina informació disposa per prendre la seva decisió. Aquest és un element essencial en la definició dels conjunts d'estratègies dels jugadors i per tant pel desenvolupament del joc. Considerem en primer lloc la part (a) de la figura 1.13. Observem que hi ha un cercle al voltant del nus (inicial) de decisió del jugador 1 i un òval que abasta els dos nusos de decisió del jugador 2. El cas del jugador 1 és trivial donat que representa l'inici del joc, i per tant te tota la informació a l'abast. El cas interessant és el del jugador 2. L'òval al voltant d'ambdós nusos de decisió del jugador 2 vol

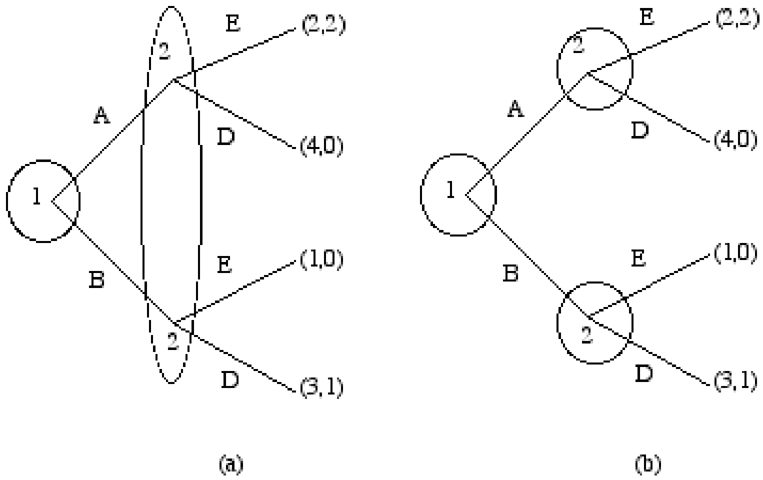

Figura 1.13: Conjunts d'informació.

dir que aquest jugador no es capaç d'esbrinar quina decisió ha pres el jugador 1. Sap que el jugador 1 ha pres una decisió, perquè d'altra manera no seria el seu torn de joc, però no coneix si el jugador 1 ha decidit A o B. Una interpretació alternativa d'aquesta situació és que els jugadors han de decidir *simultàniament* (és a dir sense observar la decisió del rival) les seves accions. En la part (b) de la figura 1.13 veiem que hi ha un cercle al voltant de cada nus de decisió del jugador 2. Això vol dir que el jugador 2, quan li toca decidir, sap si es troba en el nus de dalt o de baix. En altres paraules, el jugador 2 pot inferir quina ha estat la decisió del jugador 1. Una interpretació alternativa d'aquesta situació consisteix en considerar que el jugador 2 *observa* la decisió del jugador 1 abans de prendre la seva pròpia decisió, és a dir, les decisions dels jugadors són *seqüencials*.

Definició 1.14 (Estratègia). *Una estratègia per un jugador en un joc és una regla que determina una decisió per cada possible conjunt de informació.*

En altres paraules, una estratègia pel jugador i és una regla completa que especifica una decisió per aquest jugador en *totes i cada una* de les possibles contingències en les que es pot arribar a trobar en el joc. El desenvolupament del joc és doncs l'única d'aquestes contingències que es materialitza. Es important insistir en que l'estratègia és un vector de decisions. Independentment de la decisió que acabem prenent, l'estratègia ens ha de dir qué fer en qualsevol dels nusos de decisió del desenvolupament potencial del joc.

Per exemple, el jugador 1 en el joc de cartes de la figura 1.12, es pot trobar en dues contingències. Que hagi rebut una carta vermella o negra. Per cada contingència pot decidir aturar-se o continuar. Per tant el conjunt d'estratègies del jugador 1 és,

$$S_1 = \{AA, AC, CA, CC\}$$

on, per exemple, AC és una regla que li diu al jugador 1 que si reb una carta vermella s'aturi i que si reb una carta negra continui.

El jugador 2, per la seva banda només entra en joc si es troba en la contingència que el jugador 1 ha decidit continuar. En tal cas, te dues opcions: posar una moneda en el pot (continuar el joc) o no posar-la (aturar el joc) Per tant el seu conjunt d'estratègies conté dos elements,

$$S_2 = \{continuar, aturar\}$$

on, per exemple, "aturar"és una regla de decisió pel jugador 2 que li diu que si el jugador 1 ha decidit continuar, ell decideix no posar la moneda en el pot i aturar el joc.

En el cas de l'exemple de la figura 1.13(a), els conjunts d'estratègies respectius són,

$$S_1 = \{A, B\}, \quad S_2 = \{E, D\}.$$

En el cas de la part (b), el jugador 1 al prendre la seva decisió primer, te l'oportunitat d'influenciar (de manipular) la decisió del jugador 2. Ara els conjunts d'estratègies dels jugadors són,

$$S_1 = \{A, B\}, \quad S_2 = \{EE, ED, DE, DD\}.$$

El jugador 2 pot decidir jugar sempre E independentment de l'acció del jugador 1 (i.e. EE); pot decidir jugar sempre D independentment de l'acció del jugador 1 (i.e. DD); pot decidir jugar E si el jugador 1 ha decidit A i jugar D si el jugador ha decidit B (i.e. ED); i pot decidir jugar D si el jugador 1 ha decidit A i jugar E si el jugador ha decidit B (i.e. DE).

Veiem doncs que l'estructura de la informació del joc determina els conjunts d'estratègies dels jugadors i per tant les accions que prenen els jugadors.

Desenvolupament i pagaments

En la part (a) de la figura 1.13, el jugador 1 observa que independentment de la decisió del jugador 2, sempre obté millor resultat quan decideix A ($2 > 1$ i $4 > 3$). Per tant, en aquest joc, el jugador 1 sempre utilitza l'estratègia A. El jugador 2, que pot inferir aquest comportament del jugador 1, decidirà utilitzar l'estratègia E, i els pagaments que obtindran els jugadors seran $(2, 2)$.

En la part (b) de la figura 1.13 en canvi, des d'el punt de vista del jugador 2 el millor seria decidir E si el jugador 1 ha decidit A ($2 > 0$) i decidir D si el jugador 1 ha decidit B ($1 > 0$). El jugador 1 pot inferir aquest comportament del jugador 2 i per tant pot esperar obtenir un pagament de 2 si decideix A i un pagament de 3 si decideix B. Així doncs, observarem un desenvolupament del joc en el que el jugador 1 optarà per B i el jugador 2 optarà per D. Les estratègies utilitzades en aquest desenvolupament del joc seran respectivament B i ED. Naturalment, un observador extern d'aquest joc (b) només observa el desenvolupament del joc$[B, D]$ i els pagaments $(3, 1)$. Per comprendre perquè aquestes decisions són òptimes necessitem conèixer els conjunts d'estratègies. Només així podem comprendre perquè el jugador 1 no ha jugat A que li dona l'oportunitat potencial de guanyar 4 en lloc d'obtenir els 3 que realment obté.

Veiem doncs que d'acord amb aquesta informació podem trobar diferents tipus de jocs.

Definició 1.15 (Informació perfecta). *Diem que un jugador te informació perfecta si coneix tot el que ha passat cada vegada que algun jugador ha pres alguna decisió. En altres paraules, quan el jugador coneix tota la història de decisions del joc.*

Definició 1.16 (Joc amb informació perfecta). *Un joc amb informació perfecta és aquell en el que tots els seus jugadors tenen informació perfecta.*

Un exemple de joc amb informació perfecta és el joc d'escacs.

Definició 1.17 (Joc amb informació imperfecta). *Si en un joc hi ha algun jugador que no te informació perfecta, diem que el joc es de informació imperfecta.*

Un exemple de joc amb informació imperfecta és el poker.

Definició 1.18 (Joc amb informació incompleta). *Un joc d'informació incompleta (joc Bayesià) és aquell en el que hi ha algun jugador que te informació privada sobre les seves preferències (i per tant sobre els pagaments). En conseqüència, els altres jugadors prenen decisions basades en creences sobre aquella informació privada.*

Definició 1.19 (Joc amb informació completa). *Un joc d'informació completa és aquell en el que cap jugador te informació privada sobre cap aspecte rellevant del seu proices de decisió.*

Les subhastes són exemples de joc amb informació incompleta.

1.6.2 La forma normal d'un joc.

Una manera més senzilla de representar un joc és la forma normal. En aquesta, només necessitem especificar el conjunt de jugadors, el conjunt d'estratègies de cada jugador i els pagaments.

2/1	AA	AC	CA	CC
aturar	0,0	1,-1	0,0	1,-1
continuar	0,0	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0,0

Taula 1.7: El joc de cartes en forma normal.

2/1	A	B
E	2,2	1,0
D	4,0	3,1

Taula 1.8: El joc (a) de la figura 1.13 en forma normal.

Definició 1.20 (Joc en forma normal). *Un joc en forma normal el representem com,*

$$\Gamma = \left[N, (S_j)_{j \in N}, (u_j)_{j \in N}\right],$$

on N representa el conjunt de jugadors, S_j el conjunt d'estratègies del jugador j, i u_j els pagaments del jugador j.

Definició 1.21 (joc finit). *Diem que el joc Γ és finit si N i $(S_j)_{j \in N}$ són tots ells conjunts finits.*

Si recuperem el joc de cartes de la Figura 1.12, la seva representació en forma normal es mostra en la Taula 1.7,

De forma semblant, el joc de la part (a) de la Figura 1.13 es mostra a la Taula 1.8, i el joc de la part (b) de la figura 1.13 es representa a la Taula 1.9.

1.7 Jocs d'un jugador amb informació perfecta.

Aquests són els jocs més senzills que podem imaginar. En cert sentit són jocs degenerats perquè no hi ha interacció estratègica entre jugadors. Aquest jocs també

2/1	A	B
EE	2,2	1,0
ED	2,2	3,1
DE	4,0	1,0
DD	4,0	3,1

Taula 1.9: El joc (b) de la figura 1.13 en forma normal.

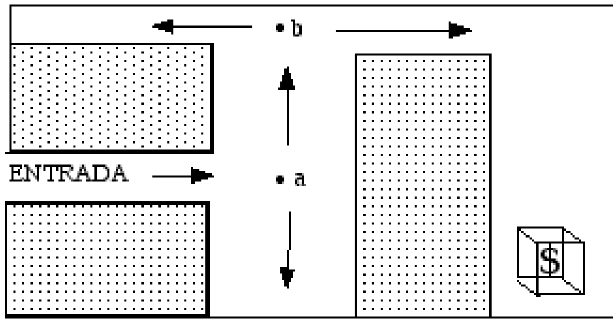

Figura 1.14: El joc del laberint.

s'anomenen *jocs contra la Natura*. El joc del solitari és un bon exemple. L'única raó que ens permet guanyar, o no, un joc de solitari és la disposició de les cartes sobre la taula i això és una decisió sobre la que el jugador no te control. Decisions sobre les que cap jugador te control s'anomenen "decisions de la Natura".

L'única raó per la que comencem a estudiar aquests jocs és la per la seva senzillesa que ens preparara per l'estudi de jocs més complexos.

1.7.1 Un joc d'un jugador amb informació perfecta.

Considerem el següent joc del laberint que es mostra en la Figura 1.14.

Un individu es prepara a entrar en el laberint. El seu objectiu és aconseguir la caixa de monedes d'or que hi ha en el laberint, sense ensopegar amb cap paret i que te un valor de M euros. Si el jugador es troba en un cul de sac, el joc s'acaba i el jugador no obté res. Si el jugador aconsegueix arribar a les monedes, obté el premi valorat en $M > 0$ euros. Es a dir,

$$\begin{aligned} U(monedes) =& M, \\ U(cul\,de\,sac) =& 0. \end{aligned}$$

Com es juga aquest joc? Després d'entrar, el jugador es troba en un nus de decisió a on ha de decidir si anar amunt o aball. Si va aball es troba en un cul de sac, el joc acaba i obté un pagament de zero; si va amunt es troba en un segon nus de decisió b.

En el nus b, el jugador pot decidir anar a la dreta o a l'esquerra. Si va a l'esquerra es troba en un cul de sac, el joc acaba i obté un pagament zero; si va a la dreta, troba les monedes, el joc s'acaba i obté un pagament M.

Per analitzar el joc podem representar-lo en forma extensiva com es mostra en la Figura 1.15.

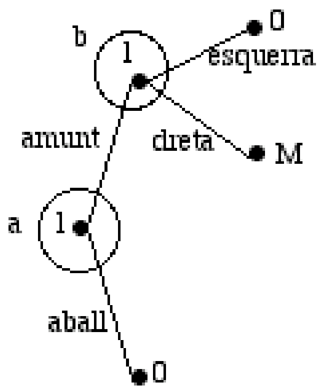

Figura 1.15: El joc del laberint en forma extensiva.

Una forma de solucionar el joc consisteix en començar en el nus final on hi ha el pagament preferit pel jugador i procedir cap enrera fins arribar al punt inicial del joc. Aquest procediment s'anomena *raonament per inducció cap enrera*.

En l'exemple del laberint que ens ocupa, donat que $M > 0$, ens situem en el nus final associat al pagament M. Observem que per arribar a aquest nus el jugador ha hagut de decidir anar a la dreta en el nus de decisió b, i per arribar al nus de decisió b el jugador ha hagut de decidir anar amunt en el nus inicial a. Així doncs, la seqüència de decisions (el desenvolupament) del joc per tal d'assolir el pagament M és: anar amunt en el nus a i anar a la dreta en el nus b. En altres paraules, l'estratègia $(amunt, dreta)$ permet obtenir el resultat desitjat.

En aquest joc, el conjunt d'estratègies del jugador és

$$S = \{(amunt, esquerra), (amunt, dreta), (aball, dreta), aball, esquerra)\}.$$

Notem que si el jugador segueix, per exemple, l'estratègia $(aball, esquerra)$ mai no es trobara en el nus b. tot i això, la definició d'estratègia exigeix especificar una acció per al nus b encara que aquesta acció mai no tindrà cap efecte sobre el desnvolupament del joc.

Podem també representar el joc en forma normal. Aquest és el contingut de la Taula 1.10,

Representat en forma normal, la solució del joc del laberint ens diu que per assolir el pagament M hem de seguir l'estratègia "amunt"en el nus de decisió a i "dreta"en el nus de decisió b.

Sota certes condicions, la solució d'un joc representat en forma normal és la mateixa que representat en forma extensiva. Dit en altres paraules, sota certes condicions donada una forma extensiva només hi ha una forma normal associada

amunt,esquerra	0
amunt,dreta	M
aball, esquerra	0
aball, dreta	0

Taula 1.10: El joc del laberint en forma normal.

(i viceversa). Si aquestes condicions no es satisfan pot passar que per una forma extensiva podem construir més d’una forma normal (i viceversa).

El cas dels jocs d’un jugador amb informació perfecta satisfan aquestes condicions.

1.8 Jocs d’un jugador amb informació imperfecta.

Quan la informació a disposició del jugador no és perfecta, hem d’utilitzar la teoria de l’utilitat esperada per solucionar el joc.

Definició 1.22 (Joc amb informació imperfecta). *Diem que un joc te informació imperfecta quan hi ha algun jugador que no sap en quin nus de l’arbre es troba quan ha de prendre una decisió.*

Per poder tenir un joc d’un jugador amb informació imperfecta necessitem introduir l’atzar (decisions de la Natura) en el joc. Per veure els efectes d’aquest element d’atzar en el desenvolupament del joc considerem el següent exemple.

Un individu pensa obrir un petit comerç. Per fer-ho disposa de 10,000 euros. Si la cojuntura econòmica és favorable (l’element d’atzar) el negoci serà profitós i obtindrà 50,000 euros. Si la cojuntura és dolenta, perdrà la inversió. En el moment de decidir si obrir el negoci, o no, l’individu no sap quina sera la cojuntura (no te prou capital per fer un estudi de mercat).

Podem representar aquest joc en forma extensiva com mostra la Figura 1.16, on p representa la probabilitat de que la cojuntura sigui favorable.

Per prendre una decisió, el jugador ha de comparar l’esdeveniment segur dels 10,000 euros de que disposa amb l’esdeveniment de obtenir 50,000 euros amb probabilitat p i zero amb probabilitat $1 - p$.

D’acord amb la teoria de l’utilitat esperada, el valor d’aquest joc pel jugador és,

$$Eu(obrir) = pu(50000) + (1 - p)u(0),$$

i aquest resultat el compara amb l’utilitat de l’esdeveniment segur $u(10000)$. La decisió del jugador dependrà del supòsit que fem de la seva actitud davant del risc. Com ja hem vist en la secció 1.5, podem distingir tres actituds davant del

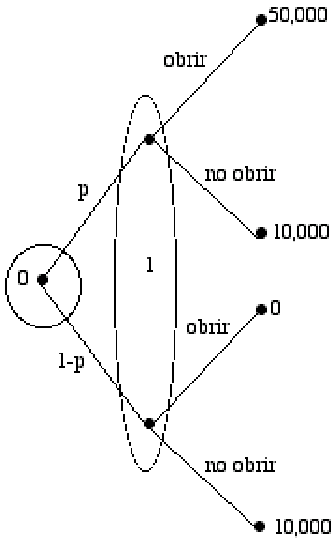

Figura 1.16: El joc del negoci.

risc: neutralitat, preferència i aversió. Considerem $p = 0.2$ i la següent família de funcions d'utilitat,

$$u(m) = m^a \quad (a \neq 0)$$

Si $a = 1$ el jugador és neutral al risc (la funció d'utilitat és lineal); si $a > 1$ el jugador mostra preferència pel risc (la funció d'utilitat és convexa); si $a < 1$ el jugador mostra aversió al risc (la funció d'utilitat és còncava).

Neutralitat davant del risc. Considerem $a = 1$. Aleshores,

$$\begin{aligned} Eu(obrir) =& (0.2)50000 = 10000, \\ Eu(no\, obrir) =& 10000, \end{aligned}$$

i el jugador és indiferent entre obrir el negoci o no fer-ho.

Aversió al risc Considerem $a = \frac{1}{2}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} Eu(obrir) =& (0.2)\frac{50000^{\frac{1}{2}}}{=}44.72, \\ Eu(no\, obrir) =& 100, \end{aligned}$$

i el jugador decideix no obrir.

Preferència pel risc Considerem $a = 2$. Aleshores,

$$
\begin{aligned}
Eu(obrir) =& (0.2)\frac{50000^2}{2} + (0.8)\frac{0^2}{2} = 5 \times 10^8, \\
Eu(no\,obrir) =& 10^8,
\end{aligned}
$$

i el jugador decideix obrir.

1.9 Exercicis

1. Mostrar que si les preferències sobre el conjunt de loteries satisfà l'axioma de independència, aleshores, $\forall \alpha \in (0,1)$ i loteries $L^{'}, L^{''}, L^{'''} \in \mathcal{L}$,

   (a) $L \succ L^{'} \Longleftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L^{''} \succ \alpha L^{'} + (1-\alpha)L^{''}$

   (b) $L \sim L^{'} \Longleftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L^{''} \sim \alpha L^{'} + (1-\alpha)L^{''}$

   (c) $L \succ L^{'}$ i $L^{''} \succ L^{'''} \Longrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L^{''} \succ \alpha L^{'} + (1-\alpha)L^{'''}$

2. Demostrar que una funció d'utilitat $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ te forma d'utilitat esperada si i només si és lineal, és a dir, si i només si satisfa la propietat,

$$U\Big(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\Big) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k).$$

   per K loteries $L_k \in \mathcal{L}$, i probabilitats $\alpha_k \geq 0, \sum_k \alpha_k = 1$.

3. Considerem un agent estrictament avers al risc. disposa d'una renda inicial de w €, però s'enfronta al risc de perdre (per robatori) D €. La probabilitat d'aquesta pèrdua es π. L'agent pot però, assegurar-se contra aquest esdeveniment. El contracte d'assegurança esta definit per una prima de q € per unitat de renda assegurada, i per una indemnització d'un euro per unitat de renda assegurada. És a dir, si l'agent contracta una assegurança amb cobertura α, la seva renda disponible és,

$$y(\alpha) = \begin{cases} w - \alpha q & \text{si no hi ha robatori} \\ w - \alpha q - D + \alpha & \text{si hi ha robatori} \end{cases}$$

   Determinar la cobertura òptima, α^*, a contractar amb una assegurança de prima justa (i.e. $\pi = q$).

4. Considerem el problema anterior. Demostrar que si l'asseguramnça no és de prima justa, és a dir, si $q > \pi$, aleshores l'agent no contractara una assegurança a tot risc (i.e. $\alpha < D$).