Macroeconomï¿½a I, UAB
Examen Final
29 de Junio, 2010

Profesores: Sekyu Choi, Stefano Gnocchi y Jose Suarez-Lledó

PREGUNTA 1. (20 puntos). Conteste a las siguientes preguntas

a. Considere la función de producción $Y = AK^{0,2}L^{0,3}H^{0,5}$, donde H representa el capital humano. Suponiendo que todos los mercados son competitivos, que un trabajador cualificado gana el producto marginal del trabajo más el producto marginal del capital humano y que un trabajador no cualificado gana el producto marginal del trabajo, ¿cuál es el cociente entre el salario del trabajador cualificado y el del no cualificado? Expresar el cociente como función de las cantidades de factor trabajo y capital humano. (4 puntos)

El producto marginal del trabajo es

$$PML = \frac{\partial Y}{\partial L} = 0{,}3AK^{0,2}L^{0,3-1}H^{0,5}$$

Mientras que el producto marginal del capital humano es

$$PMH = \frac{\partial Y}{\partial H} = 0{,}5AK^{0,2}L^{0,3}H^{0,5-1}$$

Entonces, el salario del trabajador cualificado es

$$w^c = PML + PMH = 0{,}3AK^{0,2}L^{0,3-1}H^{0,5} + 0{,}5AK^{0,2}L^{0,3}H^{0,5-1}$$

por su parte, el salario del trabajador no-cualificado es

$$w^{nc} = PML = 0{,}3AK^{0,2}L^{0,3-1}H^{0,5}$$

y el cociente es

$$\begin{aligned}
\frac{w^c}{w^{nc}} &= \frac{PML + PMH}{PML} = 1 + \frac{PMH}{PML} \\
\Rightarrow \frac{w^c}{w^{nc}} &= 1 + \frac{0{,}5AK^{0,2}L^{0,3}H^{0,5-1}}{0{,}3AK^{0,2}L^{0,3-1}H^{0,5}} \\
&= 1 + \frac{0{,}5}{0{,}3}\frac{L}{H} \\
\frac{w^c}{w^{nc}} &= 1 + \frac{5}{3}\frac{L}{H}
\end{aligned}$$

b. En los últimos cuarenta años el efecto Fisher explica bien las fluctuaciones del tipo de interés nominal. ¿Qué variables macroeconómicas miraría para comprobar esta afirmación? ¿Qué relación entre dichas variables tendría que cumplirse? (4 puntos)

El efecto Fisher dice que el tipo de interés nominal se ajusta uno a uno con la tasa de inflación. También podemos ver esto en la ecuación de Fisher:

$$i = r + \pi$$

donde i es la tasa de interés nominal, r el interés real y π la inflación. Para comprobar la afirmación de arriba, habría que mirar estas tres variables.

c. Escribir dos funciones de consumo, ambas con propensión marginal constante, de las cuales una tenga propensión media constante y la otra decreciente. (4 puntos)

Función de consumo 1:

$$C = c_0 + c_1 Y$$

la propensión marginal a consumir de esta función es

$$PMC = \frac{\partial C}{\partial Y} = c_1$$

una constante, mientras que la propensión media a consumir

$$PME = \frac{C}{Y} = \frac{c_0 + c_1 Y}{Y} = \frac{c_0}{Y} + c_1$$

es decreciente en el ingreso (Y).

Por otra parte, la siguiente función de consumo

$$\widetilde{C} = c_1 Y$$

también posee una PMC constante:

$$PMC = \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial Y} = c_1$$

pero su PME es constante a distintos niveles de ingreso, puesto que:

$$PME = \frac{C}{Y} = \frac{c_1 Y}{Y} = c_1$$

d. Jordi tiene acceso al mercado del crédito y vive dos periodos. A lo largo del tiempo su consumo se mantiene constante e igual a 100**, mientras que** $Y_1 = 0$ **y** $Y_2 = 210$ **representan su renta en el periodo 1 y 2 respectivamente. ¿Cuál es el tipo de interés real? ¿Cómo cambiaria la respuesta si la renta fuera igual a 100 en los dos periodos?(4 puntos)**

La restricción presupuestaria intertemporal de Jordi es:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}$$

Utilizando los datos de la pregunta, podemos resolver esta ecuación para encontrar el valor de la tasa de interés r:

$$\begin{aligned}
100 + \frac{100}{1+r} &= 0 + \frac{210}{1+r} \\
\Rightarrow (1+r)100 + 100 &= 210 \\
\Rightarrow (1+r) &= \frac{210 - 100}{100} \\
\Rightarrow (1+r) &= 110 \\
\Rightarrow r = 0{,}1 &
\end{aligned}$$

Si la renta fuera de 100 en ambos períodos:

$$\begin{aligned}
100 + \frac{100}{1+r} &= 100 + \frac{100}{1+r} \\
\Rightarrow (1+r)100 + 100 &= (1+r)100 + 100
\end{aligned}$$

Esta última ecuación se cumple para cualquier valor de r, por lo que la tasa de interés NO está determinada.

e. Prueba que si la función de producción agregada es $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ **y todos los factores se remuneran a su producto marginal, el valor de la producción total es igual a la renta total. (4 puntos)**

El salario real es

$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}$$

La tasa de renta del capital es

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$$

Por su parte, la renta total se define como el pago total a los factores:

$$\begin{aligned} wL + rK &= (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}L + \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}K \\ &= (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{1-\alpha} + \alpha AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \\ &= (1-\alpha)Y + \alpha Y \\ &= Y \end{aligned}$$

PREGUNTA 2. (40 puntos) Supongamos que una economía está bien descrita por el modelo de Solow con crecimiento exógeno en la población y en la tecnología, de manera que el proceso de producción viene dado por $Y = F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$. La población crece a tasa n, y la tecnología a tasa g. La economía se encuentra aún en la era anterior a los ordenadores y en su estado estacionario. Sin embargo, en un período t_0 los ordenadores se incorporan a la economía. Puedes interpretar esto como un incremento puntual y permanente en el nivel de tecnología A.

a. Ilustra con gráficos los efectos de este cambio. ¿Qué le ocurre al estado estacionario de la economía? Recuerda que el estado estacionario en este modelo siempre viene descrito por el nivel de capital eficiente, $k = K/(AL)$. ¿Cómo se ve afectado el capital per capita, K/L, tanto en el momento del cambio como en la transición al estado estacionario? Dibuja el gráfico temporal para esta variable. ¿Qué le ocurre al PIB en unidades efectivas, $y = Y/AL$? Dibuja el gráfico temporal para esta variable también. (20 pts)

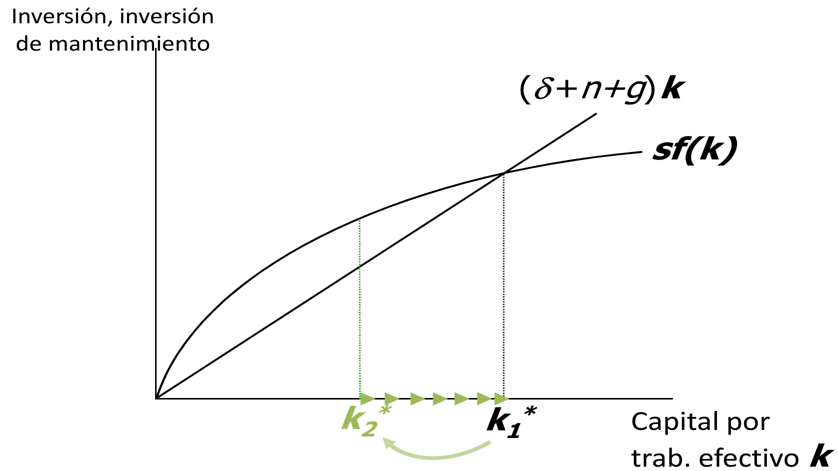
El estado estacionario de esta economía viene cuando el cambio en el capital por trabajador efectivo es igual a cero, es decir:

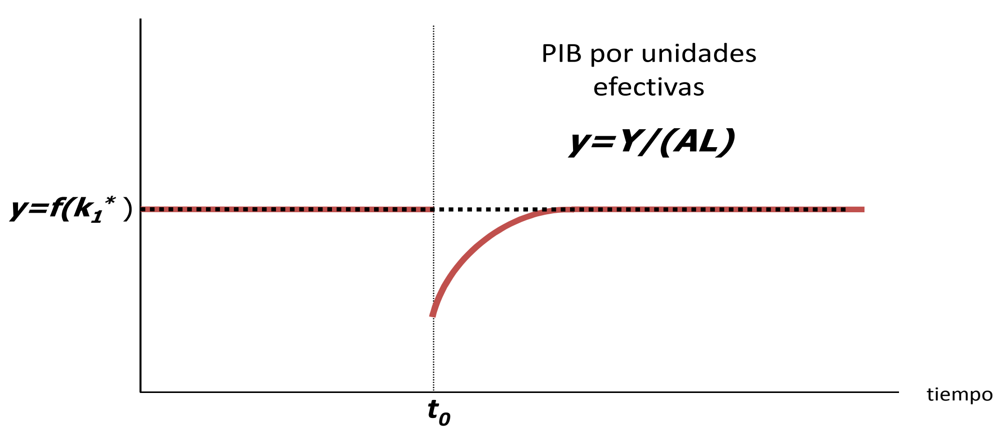
$$\begin{aligned}
\Delta k &= 0 \\
\Rightarrow sf(k) - (\delta + n + g)k &= 0 \\
\Rightarrow sk^{\alpha} - (\delta + n + g)k &= 0 \\
\Rightarrow \frac{k^{\alpha}}{k} &= \frac{\delta + n + g}{s} \\
\Rightarrow k^* &= \left(\frac{s}{n + \delta + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

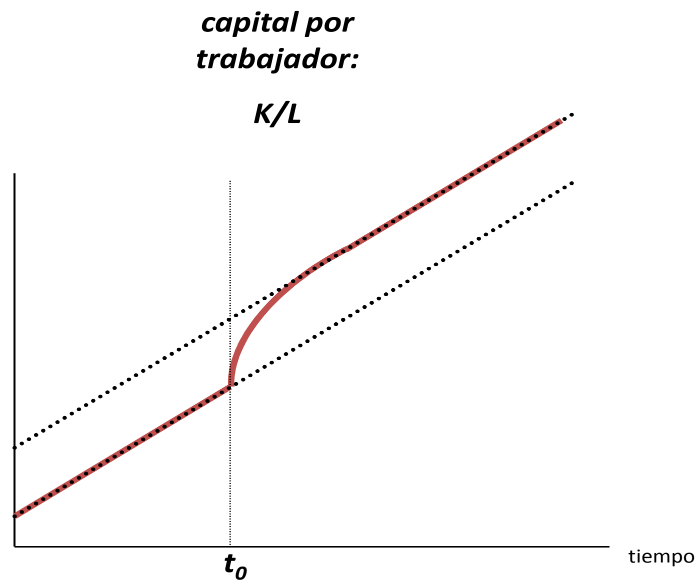
Ahora, cuando aumenta el nivel de tecnología A, el capital por trabajador efectivo $k = K/(AL)$ disminuye de golpe (de un nivel inicial k_1^* a un nivel menor k_2^*). Como nada ha cambiado en la economía, el estado estacionario sigue siendo el de arriba y la economía tiene que acumular k lentamente hasta volver a dicho valor. Esto se puede ver en la figura de más abajo.

En la figura se muestra el estado estacionario inicial (k_1^*), la caída al nivel k_2^* y la acumulación subsiguiente de capital (movimiento entre k_2^* y k_1^*).

A través del tiempo, lo que ocurre con el PIB por trabajador efectivo es análogo a lo que ocurre con el capital por trabajador efectivo, dado que $y = k^{\alpha}$. Esto se ve en la siguiente figura, donde y es una constante hasta el momento t_0 (cuando ocurre el cambio en A), cuando cae de golpe y se recupera lentamente hasta el mismo nivel.


Inversión, inversión de mantenimiento
(δ+n+g) k
sf(k)
k2*
k1*
Capital por trab. efectivo k


PIB por unidades efectivas
y=Y/(AL)
y=f(k1*)
t0
tiempo

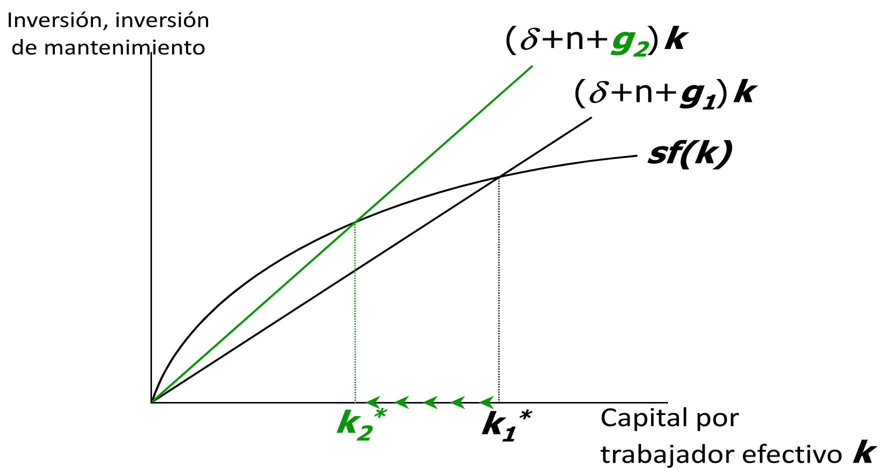


Por su parte, el capital por trabajador $K/L = Ak$ aumenta paulatinamente desde el período t_0 en adelante, llegando a crecer nuevamente a la misma tasa a la que crecía antes del cambio.

Pasado un tiempo la economía se ha adaptado totalmente a dicha innovación y se encuentra de nuevo en un estado estacionario. Sin embargo, un progresivo desarrollo de la calidad de estas máquinas ha generado un incremento más rápido en la eficiencia productiva. Interpreta esto como un incremento en la tasa de crecimiento de la economía, g.

b. ¿Cuál es ahora el efecto sobre el estado estacionario? ¿Cómo reacciona el PIB total, Y?. Nuevamente, ilustra tus respuestas con gráficos, incluyendo un gráfico temporal de la evolución de esta variable. (20 pts)

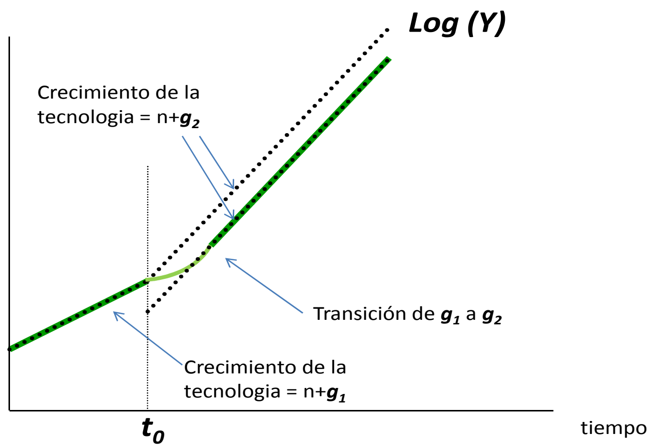
Ahora el estado estacionario cambia, dado que aumenta el valor de g. Esto se presenta en el siguiente gráfico:



al incrementarse la tasa de crecimiento de la eficiencia g, ahora el capital por trabajador efectivo de estado estacionario es menor que antes: $k_1^* > k_2^*$. La diferencia con la pregunta anterior, es que el cambio de k_1^* a k_2^* es paulatino.

La evolución del PIB total se presenta en el gráfico siguiente.

En dicho gráfico podemos ver que el PIB estaba creciendo a la tasa $n + g_1$ hasta el momento t_0, que es cuando comienza el cambio en la tasa de crecimiento de la eficiencia. Luego del cambio, la tasa de crecimiento de largo plazo de la economía aumenta a $n + g_2$, lo que se representa en el gráfico como el quiebre de la línea punteada. El PIB (línea verde) no se ajusta inmediatamente al cambio de tendencia, creciendo por un tiempo por debajo de la línea punteada original para luego ubicarse en una línea punteada paralela y más baja. Esto es consistente con el análisis anterior, donde concluimos que el capital por trabajador efectivo (y por ende, el producto por trabajador efectivo) disminuye en el nuevo estado estacionario.



PREGUNTA 3. (40 puntos) Baumolandia es un pequeño país situado en la región comunitaria de Friedmankiw. En Baumolandia, todos los habitantes deben decidir si trabajan o se dedican a producir conocimientos nuevos. Sea "u"la fracción de tiempo que los habitantes de este país dedican a producir conocimientos y "$1-u$"la fracción de tiempo dedicada a producir bienes y servicios. La función de producción agregada (Y) está dada por

$$Y_t = (1-u)H_t$$

mientras que la producción de nuevos conocimientos (H) está dada por

$$H_{t+1} = 12uH_t$$

Por otra parte, la ecuación que determina la demanda de dinero real es

$$L_t^d = \left(\frac{Y_t}{i_t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

donde i_t es la tasa nominal de interés en el periódo t

a. Si $u = \frac{1}{10}$, calcula la tasa de crecimiento de los conocimientos ($g_H = \frac{H_{t+1}-H_t}{H_t}$) y del PIB ($g_Y = \frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}$) en Baumolandia. (10 puntos)

La definición de la tasa de crecimiento g_H y la función de producción $H_{t+1} = 12uH_t$ implican

$$g_H = \frac{12uH_t - H_t}{H_t} = \frac{H_t(12u-1)}{H_t} = 12u - 1$$

Como $u = 0{,}1$,

$$g_H = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$$

La función de producción agregada implica que la tasa de crecimiento de la renta es igual a la tasa de crecimiento de los conocimientos. Precisamente, sigue directamente de la función de producción agregada que

$$\frac{Y_t}{H_t} = 1 - u$$

lo que es equivalente a decir que el ratio entre la renta y el capitál humano es constante. Entonces, renta y capitál humano tienen que crecer a la misma tasa

$$g_Y = g_H = 12u - 1 = 0{,}2$$

b. ¿Cuál es la definición de un equilibrio monetario? (5 puntos)

En un equilibrio monetario la demanda de dinero tiene que ser igual a la oferta. Entonces, en este caso concreto el equilibrio requiere que

$$\frac{M_t}{P_t} = \left(\frac{Y_t}{i_t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

c. Según la ecuación cuantitativa del dinero, calcula la velocidad del dinero para esta economía cuando existe equilibrio monetario (10 puntos)

Podemos utilizar la ecuación cuantitativa del dinero $M_t V_t = P_t Y_t$ como definición de la velocidad de circulación

$$V_t = \frac{P_t Y_t}{M_t}$$

En equilibrio la demanda es igual a la oferta, tal como en el apartado anterior. Sustituyendo la condición de equilibrio

$$\frac{M_t}{P_t} = \left(\frac{Y_t}{i_t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

en la definición de velocidad

$$V_t = \frac{P_t Y_t}{M_t}$$

se obtiene la velocidad de equilibrio

$$V_t = \left(\frac{Y_t}{i_t}\right)^{-\frac{1}{2}} Y_t = i_t^{0,5} Y_t^{0,5}$$

en función de la tasa de interés y de la renta.

d. Un famoso macroeconomista Baumoliense ha determinado que la demanda por dinero crece según la siguiente ecuación:

$$g_L = \frac{1}{2} g_Y - \frac{1}{2} g_i$$

donde g_i es la tasa de crecimiento de la tasa de interés nominal. ¿Cuál es el efecto del crecimiento económico y de la oferta monetaria sobre la inflación? (15 puntos)

Sigue directamente de la definición de equilibrio monetario

$$\frac{M_t}{P_t} = \left(\frac{Y_t}{i_t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

que

$$\gamma_M - \pi = \frac{1}{2} g_Y - \frac{1}{2} g_i$$

donde γ_M y π representan la tasa de crecimiento de la oferta monetaria y la inflación. En un estado estacionario con crecimiento constante de la masa monetaria y de la renta, el tipo de interes nominál es constante dado el hecho que

$$i = r + \pi$$

y r es exogeno a la oferta monetaria, mientras que la inflación es constante. Entonces,

$$\pi = \gamma_M - \frac{1}{2} g_Y$$

Un aumento en la tasa de crecimiento del dinero sube la inflacíon y un aumento del crecimiento de la renta baja la inflación. Recuerden que en Baumolandia, la tasa de crecimiento de la renta es creciente en el tiempo que se dedica a la acumulación de capitál humano

$$g_Y = 12u - 1$$

con lo cual, un aumento de la inversión en educación sube el crecimiento real y baja la inflación.