La función de demanda, la curva de Engel y la ecuación de Slutsky

27 de octubre de 2011

4.1

1. Condiciones de óptimo:

$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

$$p_1x_1 + p_2 2x_1 = m$$

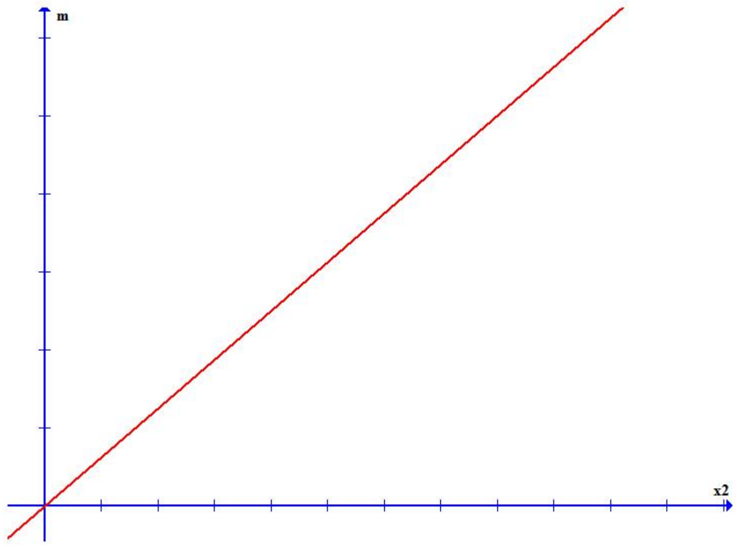
$$x_1(p_1 + 2p_2) = m$$

$$x_1(m, p_1, p_2) = \frac{m}{p_1 + 2p_2}$$

$$x_2(m, p_1, p_2) = \frac{2m}{p_1 + 2p_2}$$

2. La curva de Engel para la mercancía 2 es:

$$m = x_2 \cdot \underbrace{\left(p_2 + \frac{1}{2}p_1\right)}_{pendiente}$$



4.2

1.

$$|RMS| = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Simplificamos:

$$\frac{\alpha x_2}{(1-\alpha) x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$(1-\alpha) x_1 p_1 = \alpha x_2 p_2$$

$$x_1 = \frac{\alpha x_2\, p_2}{(1-\alpha) p_1}$$

Lo sustituyo en la restricción presupuestaria:

$$\frac{p_1\alpha\, x_2 p_2}{p_1(1-\alpha)} + p_2 x_2 = m$$

$$p_2 x_2 \left(1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\right) = m$$

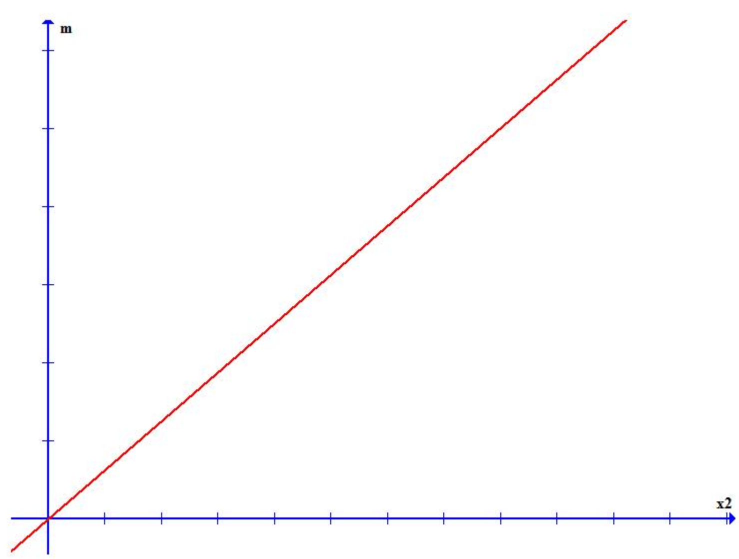
$$x_2(m, p_2) = \frac{m}{p_2\left(1+\frac{\alpha}{(1-\alpha)}\right)} = \frac{m}{p_2}\,\frac{(1-\alpha)}{[(1-\alpha)+\alpha]}$$

Entonces:

$$x_1(m, p_1) = \frac{\alpha\left(\frac{m}{p_2}\,\frac{(1-\alpha)}{[(1-\alpha)+\alpha]}\right)p_2}{(1-\alpha)p_1} = \frac{\frac{\alpha m(1-\alpha)}{[(1-\alpha)+\alpha]}}{(1-\alpha)p_1} = \frac{\alpha m(1-\alpha)}{p_1\,[(1-\alpha)+\alpha]\,(1-\alpha)} = \frac{m}{p_1}\,\frac{\alpha}{(1-\alpha)+\alpha}$$

2.

$$m(x_2, p_2) = x_2\,\underbrace{p_2\,\frac{[(1-\alpha)+\alpha]}{(1-\alpha)}}_{pendiente}$$



3. El parámetro α nos indica que porcentaje de la renta se gastará el consumidor en el bien 1 (por lo tanto $(1-\alpha)$ nos dirá que porcentaje de renta destinará al bien 2).

4.3

1. La forma general de estas funciones es:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2;\ a, b \in (-\infty, +\infty)$$

Ejemplos de estas funciones:

$u(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$, la RMS será $-\frac{5}{3}$

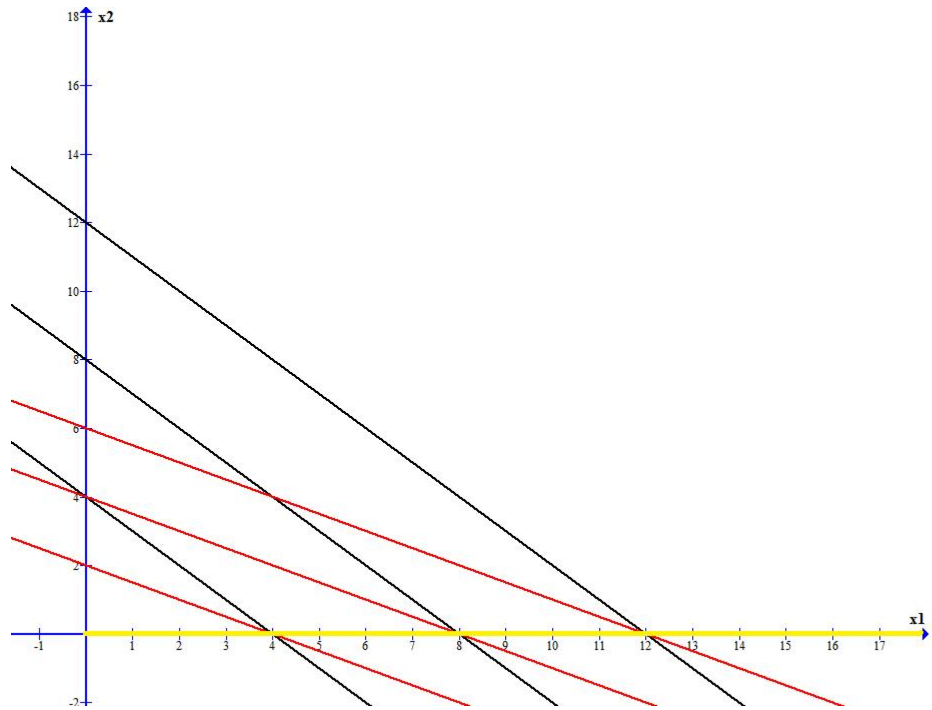
$u(x_1, x_2) = 200x_1 + 100x_2$, la RMS será -2

$u(x_1, x_2) = 10x_1 + 10x_2$, la RMS será -1 (sustitutos perfectos)

$u(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$, la RMS será $\frac{1}{2}$ (el bien 1 es un "bien" mientras que el bien 2 es un "mal")

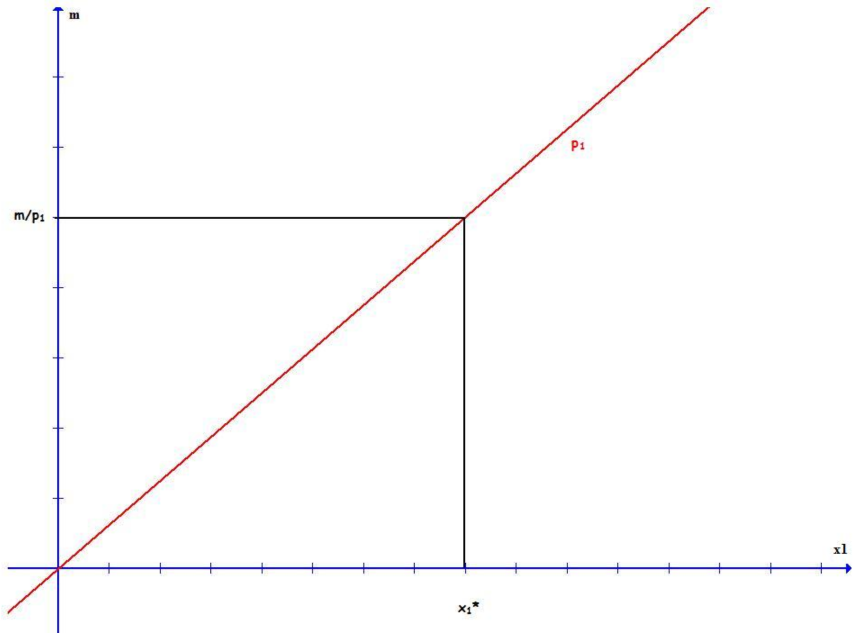
$u(x_1, x_2) = -6x_1 - 2x_2$, la RMS será 3 (los dos bienes son "males")

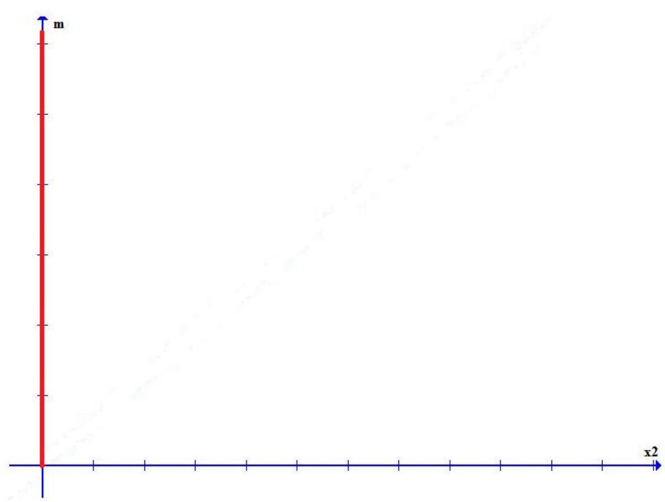
2. Utilizaremos una utilidad que represente bienes sustitutivos perfectos para realizar la curva renta consumo. En el gráfico que sigue vemos las curvas renta-consumo en el caso en el que la $RMS < \frac{p_1}{p_2}$. El consumidor solo consume el bien 1 (es más barato y los dos bienes son sustitutos perfectos).



x2
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
x1
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

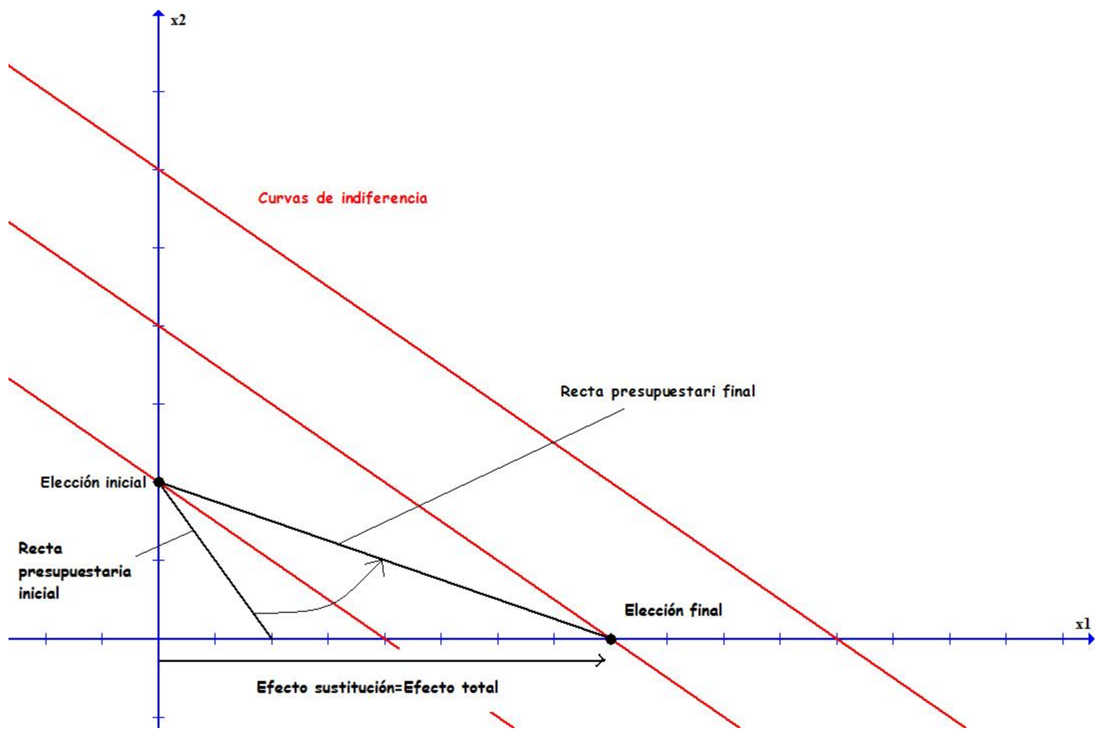
3. Representamos las curvas de Engel correspondientes a ambos bienes cuando $p_1 < p_2$:





4.

La ley de la demanda nos dice que los precios y las cantidades se mueven en sentido contrario. Es decir que si aumenta el precio la demanda disminuye y viceversa.

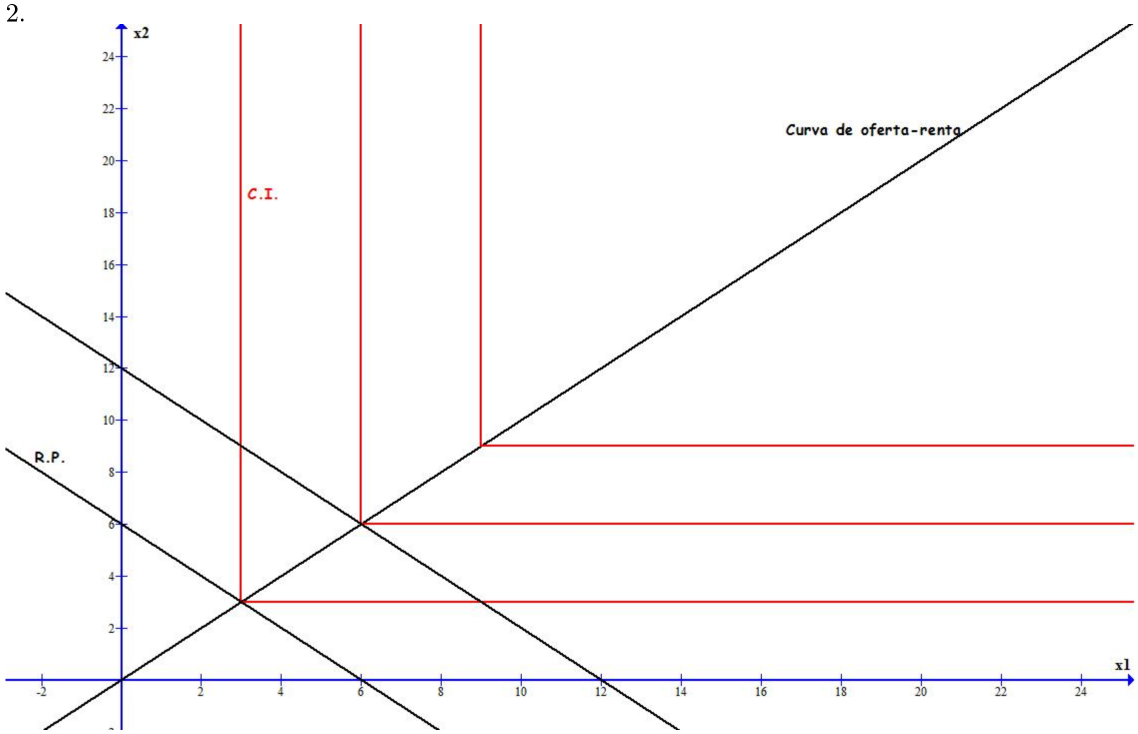


El bien no es Giffen.

4.4

1. Un mapa de curvas de indiferencia homotético puede estar representado por sustitutivos perfectos, complementarios perfectos, preferencias Cobb-Douglas...

2.



3.
Condiciones de óptimo:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases}$$

$$x_2(p_1 + p_2) = m$$

$$m(x_2, p_1, p_2) = x_2(p_1 + p_2)$$

$$m(x_1, p_1, p_2) = x_1(p_1 + p_2)$$

Las curvas de Engel son líneas rectas con pendientes $(p_1 + p_2)$.

4.

$$x_1(m, p_1, p_2) = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

$$x_2(m, p_1, p_2) = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

En el caso del bien 1 si p_1 baja su demanda aumentará, por lo tanto el bien 1 no es Giffen. Si p_2 baja, la demanda del bien 2 también aumentará: el bien 2 tampoco es Giffen. Recordad que para ver si un bien es Giffen hay que analizar la variación del bien respecto a su propio precio.

4.5

1. Condiciones de óptimo:

$$|RMS| = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1 x_1 = p_2 x_2$$

Sustituimos en la restricción presupuestaria:

$$2p_1 x_1 = m$$

$$x_1(m, p_1) = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2(m, p_2) = \frac{m}{2p_2}$$

Si $m = 10$, $p_1 = 1$ y $p_2 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

2.
¿A los nuevos precios cuanta m necesito para comprar la cesta original?

$$2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = m'$$

$$m' = 15$$

Ahora calculamos la cesta artificial con los nuevos precios y la nueva renta:

$$x_1^{''} = \frac{m'}{2p_1} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

$$x_2^{''} = \frac{m'}{2p_2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

Entonces:

$$ES \begin{cases} bien1: & x_1^{''} - x_1 = 3{,}75 - 5 = -1{,}25 \\ bien2: & x_2^{''} - x_2 = 7{,}5 - 5 = 2{,}5 \end{cases}$$

3.

$$u(5,5) = u\left(\frac{m'}{2 \cdot 2}, \frac{m'}{2}\right)$$

$$25 = \frac{m'}{4}\frac{m'}{2}$$

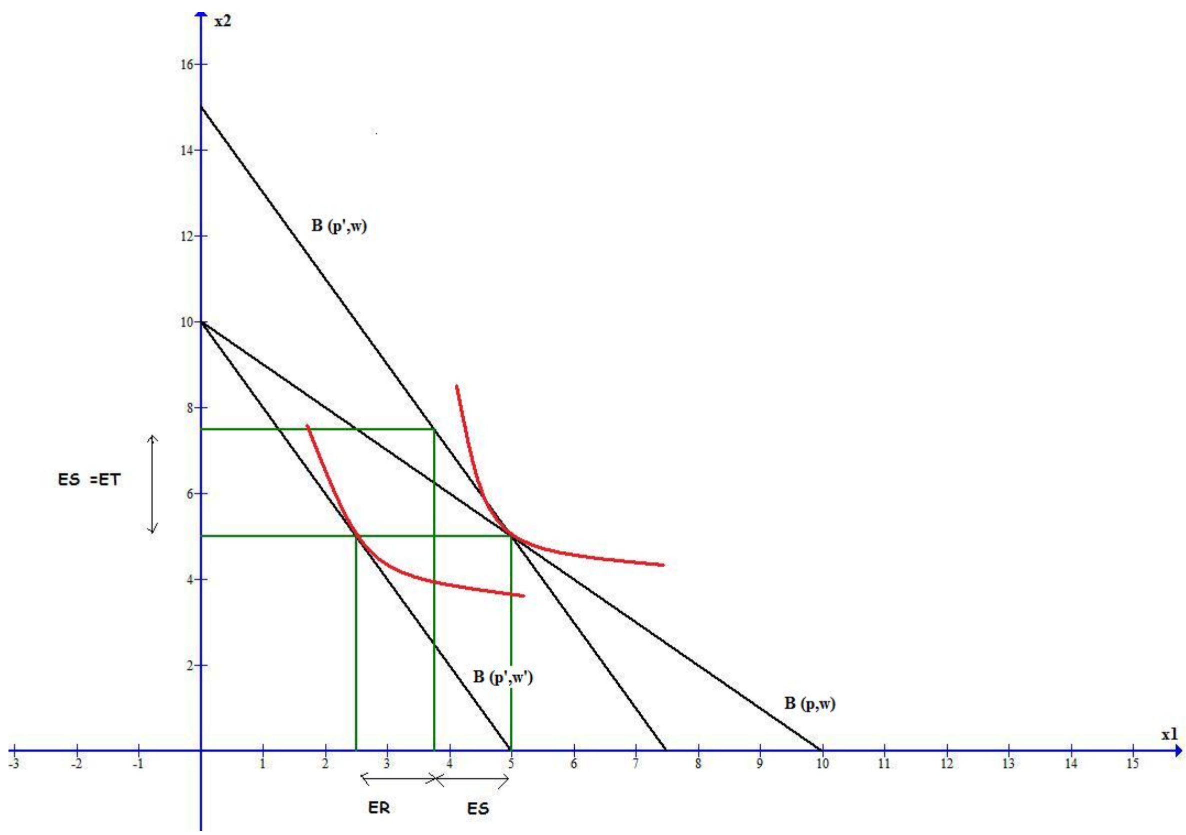
$$m'^2 = 200$$

$$m = 200^{1/2} \simeq 14{,}14$$

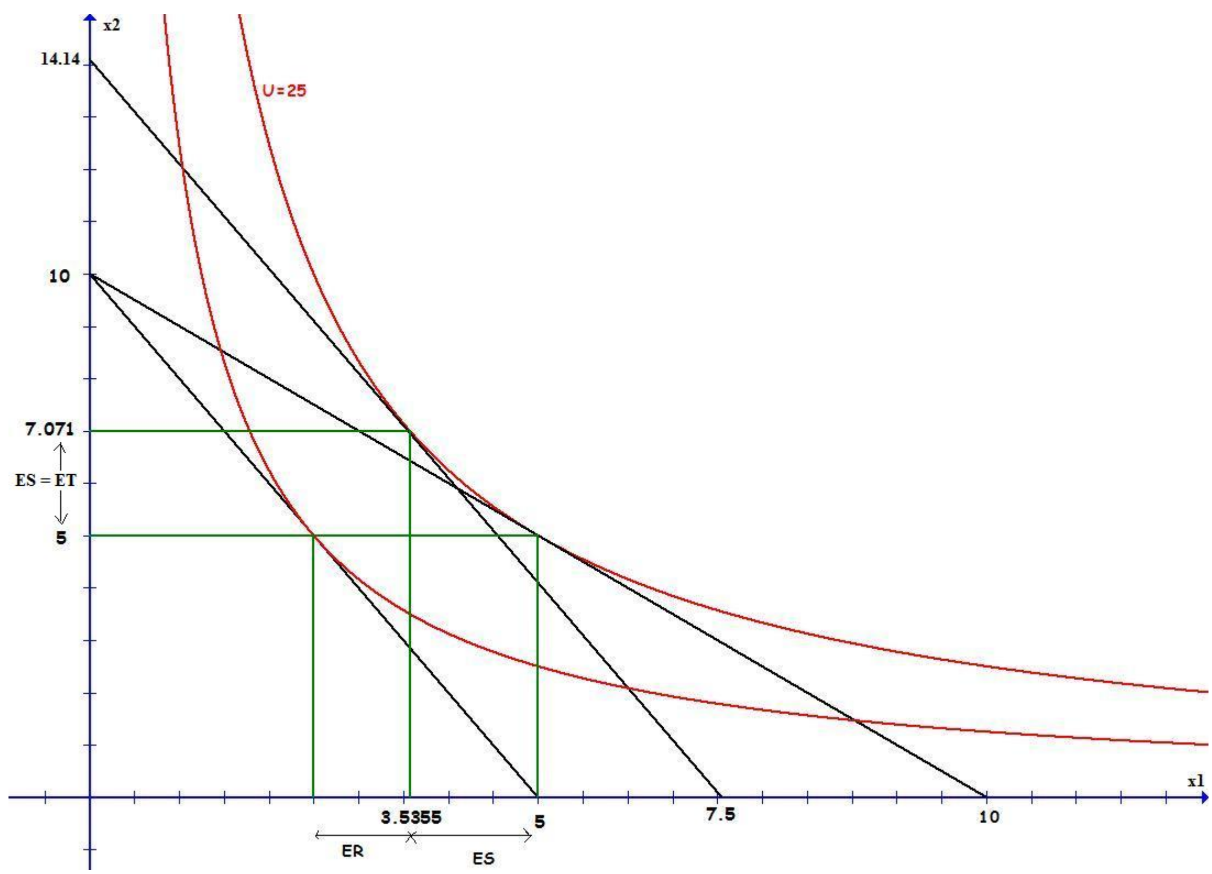
$$\begin{cases} x_1^{''} = \frac{200^{1/2}}{2 \cdot 2} = 3{,}5355 \\ x_2^{''} = \frac{200^{1/2}}{2} = 7{,}071 \end{cases}$$

$$ES \begin{cases} bien1: & x_1^{''} - x_1 = 3{,}5355 - 5 = -1{,}4645 \\ bien2: & x_2^{''} - x_2 = 7{,}071 - 5 = 2{,}071 \end{cases}$$

4. Descomposición gráfica para Slutsky:



Descomposición gráfica para Hicks:



4.6

1), 2) y 3)
Condiciones de óptimo:

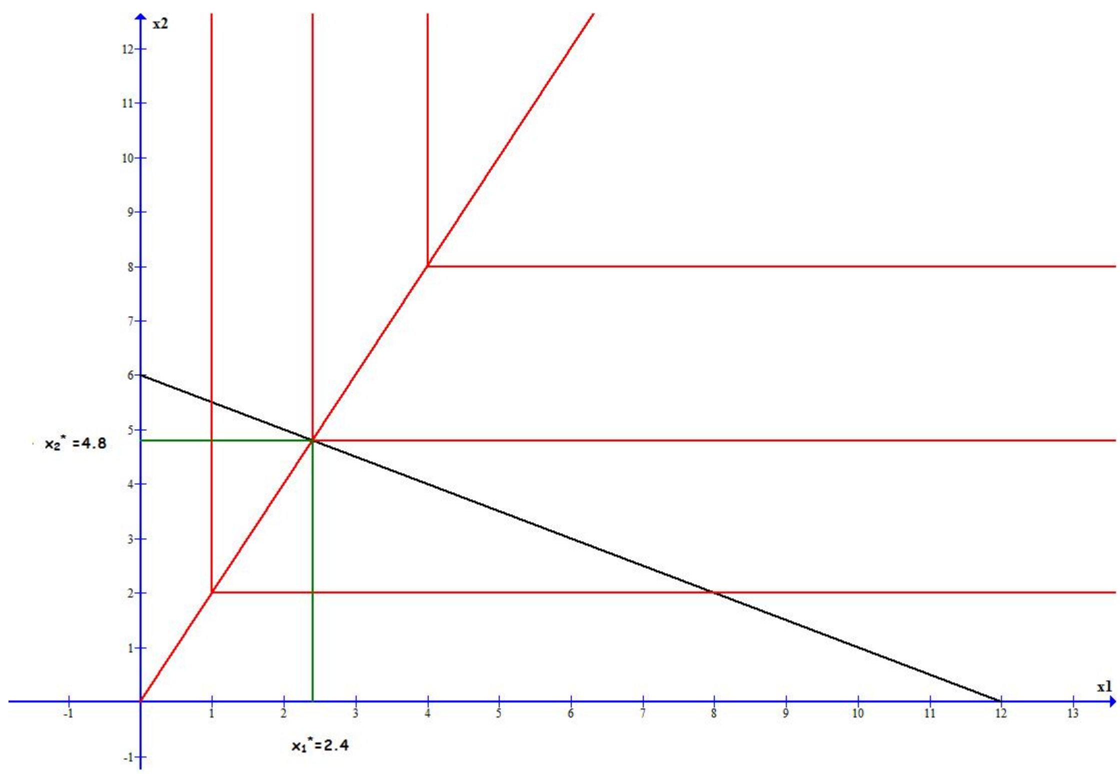
$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases}$$

$$p_1 \frac{x_2}{2} + p_2 x_2 = m$$

$$x_2 \left(\frac{1}{2} p_1 + p_2 \right) = m$$

$$x_2 = \frac{m}{\frac{1}{2} p_1 + p_2} = \frac{12}{2{,}5} = 4{,}8$$

$$\begin{cases} x_1^* = 2{,}4 \\ x_2^* = 4{,}8 \end{cases}$$



4).

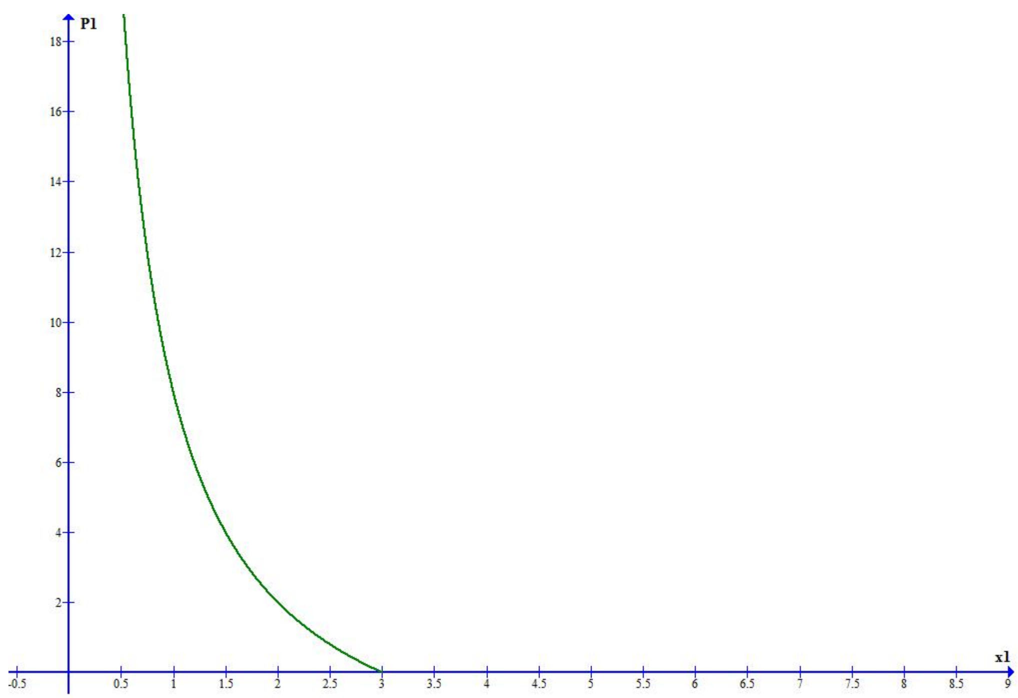
$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

$$x_1(p_1 + 2p_2) = m$$

$$\begin{cases} x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1+2p_2} \\ x_2(, p_1, p_2, m) = \frac{2m}{p_1+2p_2} \end{cases}$$

Para $p_2 = 2$ y $m = 12$:

$$x_1(p_1, 2, 12) = \frac{12}{p_1 + 4}$$



5).

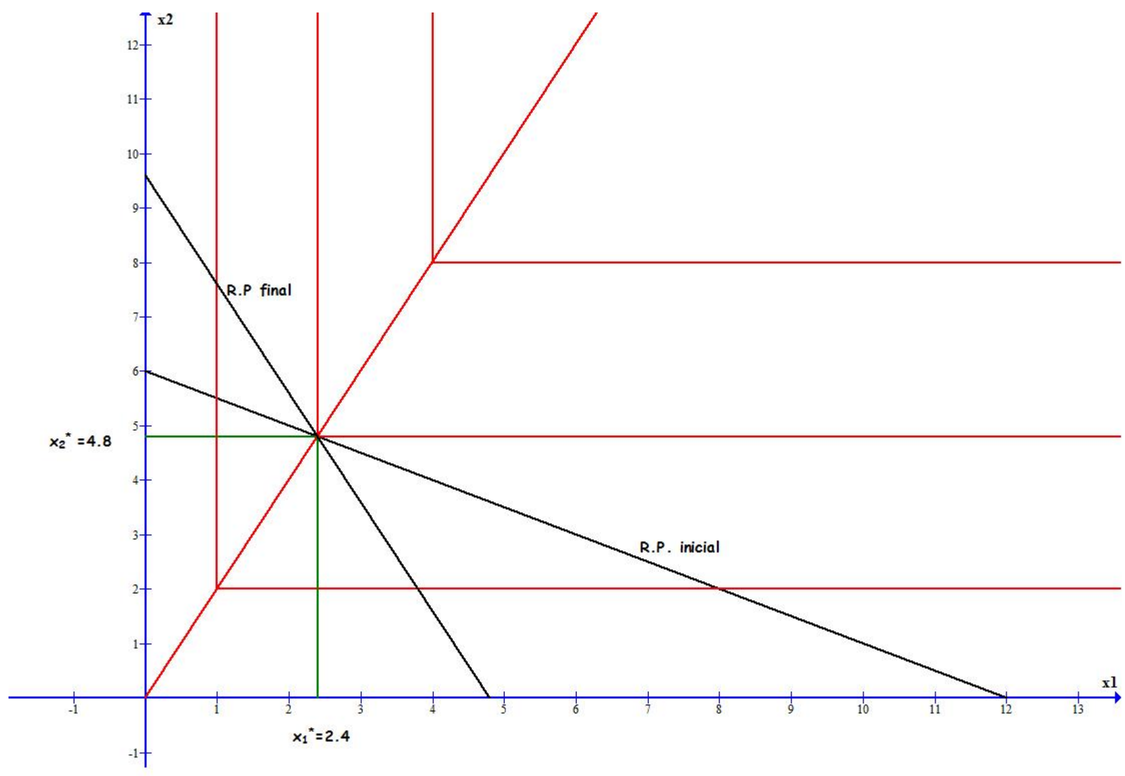
$$\Delta p_1 = 3 \Rightarrow p_1 + 3 = 4$$

$$u(2{,}4,\ 4{,}8) = u\left(\frac{m'}{4+2\cdot 2}, \frac{2m'}{4+2\cdot 2}\right)$$

$$2{,}4 = \frac{m'}{4+2\cdot 2}$$

$$m' = 19{,}2$$

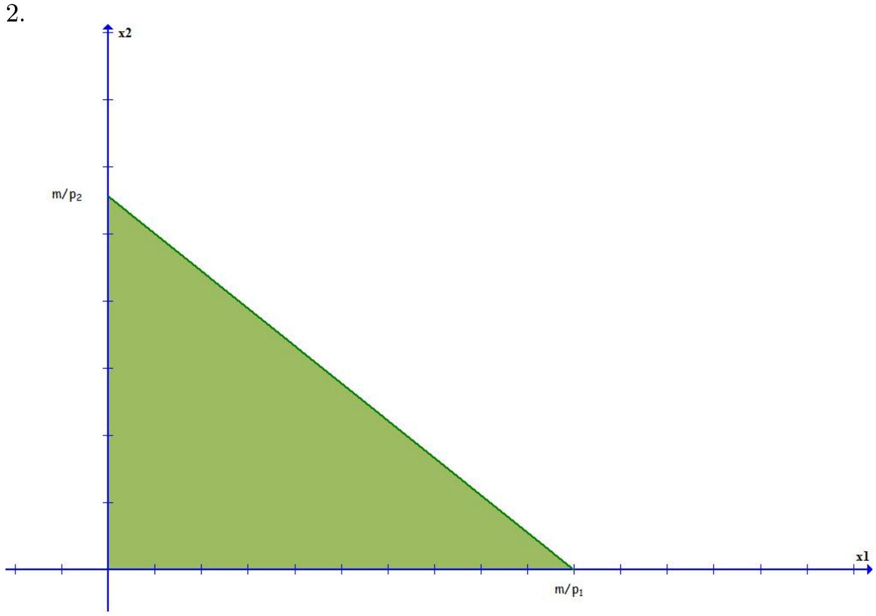
$$\triangle m = 19{,}2 - 12 = 7{,}2$$



4.7

1.

2.



3.

$$\begin{cases} si\,\frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2} & \Rightarrow (x_1^*, x_2^*) = (\frac{m}{p_1}, 0) \\ \\ si\,\frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2} & \Rightarrow (x_1^*, x_2^*) = (0, \frac{m}{p_2}) \\ \\ si\,\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2} & \Rightarrow (x_1^*, x_2^*) = cualquier\, punto\, en\, la\, recta\, presupuestaria \\ \end{cases}$$

4.

$$|RMS| = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1 = p_2\,\frac{\alpha}{\beta}$$

Sustituimos en la restricción presupuestaria:

$$\left(p_2\,\frac{\alpha}{\beta}\right)x_1 + p_2x_2 = m$$

$$x_1^* = \left(\frac{m}{p_2} - x_2\right)\,\frac{\beta}{\alpha}$$

Sustituimos $p_2 = 1$,$m = 10$ y $\alpha = \beta = 1$:

$$x_1^* = 10 - x_2$$

La función de demanda está hallada en el apartado anterior:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{m}{p_1}, & si\,\frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2} \\ \\ x_1^* = 0, & si\,\frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2} \\ \\ x_1^* = \frac{m-(p_2x_2)}{p_1}, & si\,\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}\,\forall\, x_2 \in \left[0, \frac{m}{p_2}\right] \end{cases}$$

4.8

1.

Condiciones de óptimo:

$$|RMS| = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1 x_1 = p_2 x_2$$

Sustituimos en la restricción presupuestaria:

$$2p_1 x_1 = m$$

$$x_1(m, p_1) = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2(m, p_2) = \frac{m}{2p_2}$$

Si $m = 10$, $p_1 = 1$ y $p_2 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Con un IVA del 25 % sobre el bien 2 (vino) p_2 pasará a ser igual a 1,25:

$$\begin{cases} x_1^{'} = 5 \\ x_2^{'} = 4 \end{cases}$$

$$ET \begin{cases} bien1: & x_1^{'} - x_1 = 5 - 5 = 0 \\ bien2: & x_2^{'} - x_2 = 4 - 5 = -1 \end{cases}$$

2.

¿A los nuevos precios cuanta m necesito para comprar la cesta original?

$$1 \cdot 5 + 1{,}25 \cdot 5 = m'$$

$$m' = 11{,}25$$

Ahora calculamos la cesta artificial con los nuevos precios y la nueva renta:

$$x_1^{''} = \frac{m'}{2p_1} = \frac{11{,}25}{2} = 5{,}625$$

$$x_2^{''} = \frac{m'}{2p_2} = \frac{11{,}25}{2{,}5} = 4{,}5$$

Entonces:

$$ES \begin{cases} bien1: & x_1^{''} - x_1 = 5{,}625 - 5 = 0{,}625 \\ bien2: & x_2^{''} - x_2 = 4{,}5 - 5 = -0{,}5 \end{cases}$$

$$ER \begin{cases} bien1: & x_1^{'} - x_1^{''} = 5 - 5{,}625 = -0{,}625 \\ bien2: & x_2^{'} - x_2^{''} = 4 - 4{,}5 = -0{,}5 \end{cases}$$

3.

$$u(5,5) = u\left(\frac{m'}{2}, \frac{m'}{2{,}5}\right)$$

$$25 = \frac{m'}{2}\,\frac{m'}{2{,}5}$$

$$m'^2 = 125$$

$$m = 125^{1/2} \simeq 11{,}18$$

$$\begin{cases} x_1^{''} = \frac{125^{1/2}}{2} = 5{,}590 \\ x_2^{''} = \frac{125^{1/2}}{2{,}5} = 4{,}472 \end{cases}$$

$$ES \begin{cases} bien1: & x_1^{''} - x_1 = 5{,}590 - 5 = 0{,}590 \\ bien2: & x_2^{''} - x_2 = 4{,}472 - 5 = -0{,}528 \end{cases}$$

$$ER \begin{cases} bien1: & x_1^{'} - x_1^{''} = 5 - 5{,}590 = -0{,}590 \\ bien2: & x_2^{'} - x_2^{''} = 4 - 4{,}472 = -0{,}472 \end{cases}$$

4.

$$\triangle m? \Longrightarrow \triangle m = m' - m$$

$$Slutsky: \triangle m = 11{,}25 - 10 = 1{,}25$$

$$Hicks: \triangle m = \sqrt{125} - 10 = 1{,}18$$

5.

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 (1 + 0{,}25) = m$$

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \underbrace{x_2p_2 \cdot 0{,}25}_{recaudación} = m$$

La recaudación es: $4 \cdot 0{,}25 = 1$.

6.

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = 1{,}25 \end{cases}$$

$$|RMS| = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_1 = 1{,}25x_2$$

Sustituimos en la restricción presupuestaria:

$$x_1 + 1{,}25x_2 = 10 + 0{,}25x_2$$

$$2{,}25x_2 = 10$$

Entonces:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{11}{2} = 5{,}5 \\ x_2^* = \frac{11}{2{,}5} = 4{,}4 \end{cases}$$

Sí se cumpliera el objetivo del gobierno.

7.

La medida es neutral desde el punto de vista de la hacienda, sin embargo no es neutral desde el punto de vista del bienestar privado. La utilidad antes de impuestos es mayor que la utilidad con impuestos más transferencia.

$$u(5,5) = 25$$

$$u(5{,}5,\ 4{,}4) = 24{,}2$$

8.
Nuevos precios:

$$\begin{cases} p_1 = (1-s) \\ p_2 = 1{,}25 \end{cases} \Rightarrow |RMS| = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{(1-s)}{1{,}25}$$

Restricciones presupuestarias:

$$\begin{cases} consumidor \Rightarrow (1-s)x_1 + 1{,}25x_2 = 10 \\ \\ hacienda \Rightarrow s\,x_1 = 0{,}25x_2 \end{cases}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(1-s)}{1{,}25} \Rightarrow 1{,}25x_2 = (1-s)x_1$$

Restricción consumidor:

$$(1-s)x_1 + 1{,}25x_2 = 10$$
$$1{,}25x_2 + 1{,}25x_2 = 10$$

$$x_2^* = 4$$

Restricción hacienda:

$$s\,x_1 = 0{,}25 \cdot 4 = 1$$

Restricción consumidor:

$$x_1 - s\,x_1 + 1{,}25x_2 = 10$$
$$x_1 - 1 + 1{,}25(4) = 10$$

$$x_1^* = 6$$

Entonces "s" es igual a:

$$s\, x_1^* = 1$$

$$s \cdot 6 = 1$$

$$s = \frac{1}{6}$$

Comprobamos:

$$(1-s)x_1^* + 1{,}25 x_2^* = 10$$

$$\frac{5}{6} \cdot 6 + 1{,}25 \cdot 4 = 5 + 5 = 10$$

La utilidad en este caso es:

$$u(x_1^*, x_2^*) = u(6,4) = 24$$

9.

La razón por la que la distorsión de precios empeora el bienestar del consumidor es el tipo de preferencias que tiene. Con $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ el consumidor está peor con un impuesto sobre el vino y una subvención sobre el pan que sin ninguna intervención gubernamental. Además fija-os que en el punto 6 y 8 el consumidor elige cestas que ya estaban disponibles en el principio (antes de impuestos). Con unas preferencias del tipo $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ningún impuesto sobre el vino afectaría a su bienestar (asumiendo precios unitarios tendría siempre una utilidad de 10).

Finalmente, el conjunto presupuestario no se hace más grande, el "aumento" del conjunto presupuestario depende de la elección del consumidor:

$$En\, 4{,}8{,}6$$

$$\{(x,y):\ x + (1+t)y \leq 10 + yt\}$$

$$\{(x,y):\ x + y \leq 10\} \Rightarrow R.P.\, original$$

En 4,8,8

$$\left\{(x,y):\ x\left(1-\frac{yt}{x}\right)+y(1+t)\leq 10\right\}$$

$$\{(x,y):\ x-yt+y(1+t)\leq 10\}$$

$$\{(x,y):\ x+y\leq 10\}\Rightarrow R.P.\,original$$