Econometria Examen Final, Primer Semestre, Septembre, 2008, grup 01
Prof. M. Farell.

Formulas i expressions:

$$(1)F = \frac{RSS_R - RSS_{UN}/q}{RSS_{UN}/n-k}$$

$$(2)F = (R\widehat{\beta} - r)'[R\widehat{\sigma^2}R']^{-1}(R\widehat{\beta} - r)/q$$

$(X'X)^{-1}$

$$(3)t = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\widehat{V(\hat{\theta})}}}$$

(4) Si x es un vector de variables aleatòries i $x \sim N(\mu,\Sigma)$ llavors la combinació lineal $a + Ax \sim N(a + A\mu, A\Sigma A')$

I. Considereu el model següent:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$$

on $i = 1, 2, ...103$;i ε_i satisfa els supòsits clàssics. El model representa les notes de matemàtiques dels estudiants de 15 anys, en funció del nivell de renda dels pares en milers d'euros (x_2), i del nombre promig d'anys d'educació dels pares, (x_3). El model pot expressarse en notació matricial com:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

1. (0.5 punts) Expresseu el contingut de cada vector i matriu (utilitzeu notació estandard) de l'expressió, per aquest cas. Indiqueu les dimenssions.

2. (1.5 punts) L'estimador MQO és $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 100 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$. Doneu l'expressió de la mitjana condicional estimada, per aquest problema, i interpreteu-la.

3. (1.5 punts) Interpreteu el significat económic de cada element del vector $\hat{\beta}$.

4. (1.5 punts) Resultats: $(x'x)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0.4 & 3 \\ 4 & 3 & 0.2 \end{bmatrix}$; $SQR = 200$
   Com farieu un test de significativitat per a cada un dels coeficients del model? Detalleu: 1) la hipòtesis, 2) la formula del contrast estadístic, 3) les regions d'acceptació/rebuig, considereu un valor plausible com a valor critic.

5. (3 punts) Expliqueu pas a pas com farieu el contrast d'hipòtesis $\beta_2 = \beta_3 = 0$ utilitzant el métode de sustitució. Quin model o models estimarieu i quin estadístic utilitzarieu pel contrast. L'explicació ha de ser concisa però clara i completa, sino obtindreu menys de 1.5 punts per aquesta pregunta.

6. (2 punts) Considereu ara, que voleu contrastar que $\beta_2 + \beta_3 = 1$. Expliqueu, expresseu analíticament en detall, i realitzeu el contrast, a partir **del model no restringit**. Altre vegada, heu de ser precisos i clars si voleu obtenir tots els punts.

Examen resolt : Final (1er sem) Setembre 2008
o indicant solucions

I.1 : $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i$

$n = 103$

sota supòsits clàssics

notació matricial $y = X\beta + \varepsilon$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{103} \end{bmatrix} \; ; \; X = \begin{bmatrix} 1 & X_{12} & X_{13} \\ 1 & X_{22} & X_{23} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{103,2} & X_{103,3} \end{bmatrix} \; ; \; \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{103} \end{bmatrix}$$

I.2 $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 100 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$\widehat{E(Y/X)} = 100 + 5X_2 + 10X_3$$

substituint els valors que ens interessin a X_2 i X_3 tindrem la mitjana estimada de les notes de matemàtiques condicionals als valor de X_2 i X_3.

I.3

$\hat{\beta}_1 = 100$, és el terme constant és la nota mitja de matemàtiques quan les variables X_2 i X_3 prenen el valor 0.

$\hat{\beta}_2 = 5$ $\quad \hat{\beta}_2 = \widehat{\dfrac{\partial Y}{\partial X_2}} = 5$ ens diu que

quan la renda anual dels pares incrementa ~~en~~ mil euros la nota mitjana estimada (promig) augmenta en 5 punts.

$\hat{\beta}_3 = 10$ $\quad \hat{\beta}_3 = \widehat{\dfrac{\partial Y}{\partial X_3}} = 10$ ens diu que

quan els anys d'educació rebuda pels pares incrementa en un any la nota mitjana promig estimada incrementa en 10 punts.

I.4

1) $H_0: \beta_2 = 0$ $\quad$ $H_0: \beta_3 = 0$

$H_A: \beta_2 \neq 0$ $\quad$ $H_A: \beta_3 \neq 0$

2) $t = \dfrac{\hat{\beta}_2 - 0}{S_{\hat{\beta}_2}}$; $\dfrac{\hat{\beta}_3 - 0}{S_{\hat{\beta}_3}}$

$$\frac{5 - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}_{2,2}}} \; ; \; \frac{10 - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}_{3,3}}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQR}{n-k} = \frac{200}{100} = 2$$

$$\frac{5-0}{\sqrt{2 \times 0.4}} \sim t \qquad \frac{10-0}{\sqrt{2 \times 0.2}} \sim t$$

3) $\alpha = 0.05$, $t_{0.025}$, $n-k = 100$

$$\frac{5}{\sqrt{0.8}} > t_{\frac{\alpha}{2}, 100} \qquad \frac{10}{\sqrt{0.4}} > t_{\frac{\alpha}{2}, 100}$$

Rebutjem H_0 $\quad$ Rebutjem H_0

H_0 comparem amb 2.

I.5

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i \quad \text{model NO-REST}$$

$$H_0 \quad \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$y_i = \beta_1 + \varepsilon_i \quad \rightarrow \text{MODEL REST}$$

$$\hat{\beta}_{NR} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} \qquad \hat{\beta}_R = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{1,R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estimem els dos models per MQO

$$\hat{\varepsilon}_{NR} = \hat{Y} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_2 - \hat{\beta}_3 X_3$$

$$SQR_{NR} = \hat{\varepsilon}_{NR}' \hat{\varepsilon}_{NR}$$

$$\hat{\varepsilon}_R = \hat{Y} - \bar{Y} \quad \text{ja que } \hat{\beta}_1 = \bar{Y}$$

$$SQR_R = \hat{\varepsilon}_R' \hat{\varepsilon}_R$$

Obtenim la SQR dels dos models i apliquem el test de la F

$$\frac{SQR_R - SQR_{NR} / 2}{\frac{SQR}{100}} \sim F_{2,100}$$

I.6

i) $H_0: \beta_2+\beta_3=1$

$H_A: \beta_2+\beta_3 \neq 1$

ii) estadístic de contrast

$$F \sim (R\hat{\beta}-r)'[R\widehat{V(\hat{\beta})}R']^{-1}(R\hat{\beta}-r)/q$$

o $$\frac{R\hat{\beta}-r}{\sqrt{\widehat{V}(R\hat{\beta})}} \sim t$$

$$R=[0 \quad 1 \quad 1] \qquad \hat{\beta}=\begin{bmatrix}100\\5\\10\end{bmatrix} \qquad r=1$$

$$\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}=\widehat{V(\hat{\beta})}=2\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 0.4 & 3\\ 4 & 3 & 0.2\end{bmatrix}$$

S'han de fer totes les operacions i fer el contrast, fins a iii) decidir si Rebutjem o no l'H_0

Exercici :

Estimació d'una funció de cost en un sector dominat per 3 aerolínees.

$TC = f$ (output, preu treball, preu petroli, preu materials + altres)

suposarem tecnologia Cobb-Douglas:

$$\ln TC = \cancel{\alpha} + \beta_Q \ln Q + \beta_{P_T} \ln P_T + \beta_{P_P} \ln P_P + \beta_{P_{MAT}} \ln P_{MAT} + \varepsilon$$

$n = 84$

Suposarem que les 3 aerolínees produeixen l'output (Q), que son milles consumides pels viatgers amb una mateixa tecnologia respecte als preus dels inputs, però podrien tenir paràmetres diferents en els costos fixes i en el paràmetre que afecta a l'output β_Q.

Proposem les següents estimacions i contrastos:

1) No mes analitzarem si les companyies aerees tenen els mateixos costos fixes, pero suposarem que realment la resta de la tecnologia és la mateixa

Definim:

$$D_1 = \begin{cases} 1 & \text{si es aerolínea } 1 \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 1 & \text{si es aerolínea } 2 \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

$$D_3 = \begin{cases} 1 & \text{si es aerolínea } 3 \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

Estimem (model format 2):

$$\ln TC = D_1 \alpha_1 + D_2 \alpha_2 + D_3 \alpha_3 + \beta_Q \ln Q + \beta_{P_T} \ln P_T + \beta_{P_P} \ln P_P + \beta_{P_{MAT}} \ln P_{MAT} + \varepsilon$$

Resultats:

$$\widehat{\ln TC} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\beta}_Q \ln Q + \hat{\beta}_{P_T} \ln P_T + \hat{\beta}_{P_P} \ln P_P + \hat{\beta}_{P_{MAT}} \ln P_{MAT}$$

	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_Q$	$\hat{\beta}_{P_T}$	$\hat{\beta}_{P_P}$	$\hat{\beta}_{P_{MAT}}$
	20.76	20.79	20.60	0.87	0.24	0.16	0.53
$S_{\hat{\beta}}$	(.4)	(.3)	(.38)	(.18	(.16)	(.09)	(.34)
t	51.9	69.3	54	4.8	1.45	1.72	1.52

El contrast és:

i) $H_0: \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \longrightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{matrix}$ dues equac.

H_A: alguna és falsa $\longrightarrow$

Podem escriure l'H_0 com $\begin{matrix} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{matrix}$

Si haguessim de fer el contrast a partir del model no-restringit, ara necessitariem construir l'estadístic de contrast

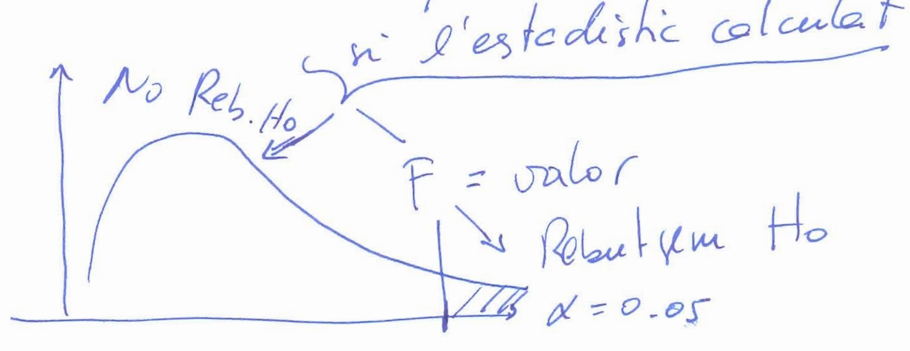
ii) $(R\hat{\beta} - r)' \left[R (X'X)^{-1} R' \right]^{-1} (R\hat{\beta} - r) / q \cdot \hat{\sigma}^2$

o $(R\hat{\beta} - r)' \left[R \widehat{V(\hat{\beta})} R' \right]^{-1} (R\hat{\beta} - r) / q \sim F_{q, n-k}$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 20.76 \\ 20.79 \\ 20.60 \\ 0.87 \\ 0.24 \\ 0.16 \\ 0.53 \end{bmatrix}$$

es necessitaria tenir resultats sobre $(X'X)^{-1}$ i $\hat{\sigma}^2$ o que si puguí arribar, ja que també $\widehat{V(\hat{\beta})} = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$

iii)



En aquest cas resoldrem el contrast a partir d'estimar els dos models, el rest. i el no-rest. i comparar la suma dels quadrats dels residus

ii) Estimem el model restringit:

$$\widehat{\ln TC} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_Q \ln Q + \hat{\beta}_{P_T} \ln P_T + \hat{\beta}_{P_P} \ln P_P + \hat{\beta}_{P_{MAT}} \ln P_{MAT}$$

	20.70	0.85	0.26	0.19	0.51
$S_{\hat{\beta}}$	0.5	0.19	0.2	0.11	0.34
t	41.4	4.47	1.3	1.73	1.5

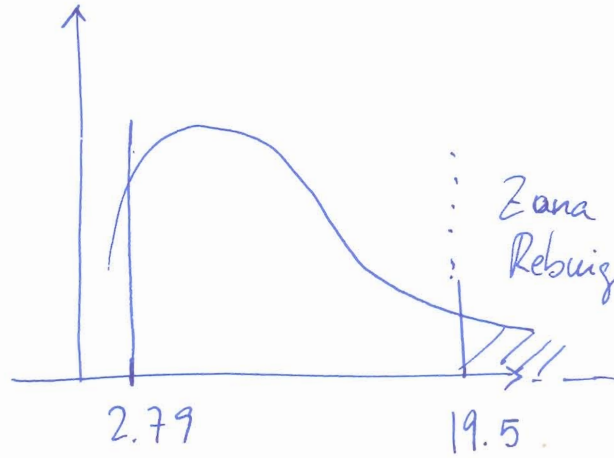
$SQR_R = 118$ $\quad n = 84 \quad k = 7$

$SQR_{NR} = 110$ $\quad q = 2$

iii) $$F = \frac{(118 - 110)/2}{\frac{110}{84-7}} = \frac{4}{1.43} = 2.79$$

$F_{(2,77)} = 19.5$

$\alpha = 0.05$



. No rebutgem Ho vol dir que totes les companyies estan operant amb els mateixos