1 ÁLGEBRA MATRICIAL

1.1 Definiciones basicas

1.1.1 Matriz

Una matriz de orden, o de dimensión, M por N (escrita como $M \times N$) es un conjunto de $M \times N$ elementos ordenados en M filas y N columnas. Por tanto, una matriz A de (M × N) puede expresarse como

$$\underset{M\times N}{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{M1} & a_{M2} & a_{M3} & ... & a_{MN} \end{bmatrix}$$

donde a_{ij} es el elemento que aparece en la $i$ésima fila y la $j$ésima columna de A, y donde $[a_{ij}]$ es una expresión abreviada para la matriz A cuyo elemento característico es a_{ij}.

1.1.2 Vector columna

Una matriz que consta de M filas y sólo una columna se denomina vector columna.

$$\underset{4\times 1}{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

1.1.3 Vector fila

Una matriz que consta de sólo una fila y N columnas se denomina vector fila.

$$\underset{1\times 4}{x} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

1.2 Tipos de matrices: Ejemplos

- Matriz cuadrada

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 5 \\ 8 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Matriz identidad o unitaria

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz escalar

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz simétrica

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \underset{3\times 3}{A}'$$

- Matriz idempotente

$$A = A^2 = A^3 = A^4 = ...$$

1.3 Operaciones matriciales

1.3.1 Adición y substracción de matrices

Si A y B son del mismo orden, se defina la adición de matrices como

$$A + B = C$$

donde C es del mismo orden que A y B.

$$\underset{2\times 4}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times 4}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times 4}{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$

La substracción de matrices sigue el mismo principio que la adición de matrices, excepto que $C = A - B$, siempre y cuando A y B sean del mismo orden.

1.3.2 Multiplicación de matrices

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times 2}{C} = \begin{bmatrix} 60 & 37 \\ 34 & 37 \end{bmatrix}$$

$$Regla \; : \qquad \underset{(m\times p)}{A}\underset{(p\times b)}{B} = \underset{(m\times b)}{C}$$

Propriedades de la multiplicación de matrices:

1) La multiplicación de matrices no necesariamente es commutativa:

$$AB \neq BA$$

AB significa que A es postmultiplicada por B o B es premultiplicada por A.Aun si AB y BA existen, las matrices resultantes pueden no ser del mismo orden!

2) Un vector fila postmultiplicado por un vector columna es un escalar.

$$\hat{u}\hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 & ... & \hat{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ ... \\ \hat{u}_n \end{bmatrix}$$

$$= \hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + \hat{u}_3^2 + ... + \hat{u}_n^2$$

$$= \sum \hat{u}_i^2 \ \textit{es un escalar}$$

3) Un vector columna postmultiplicado por un vector fila es una matriz.

$$uu' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ ... \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & ... & u_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 & ... & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 & ... & u_2u_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ u_nu_1 & u_nu_2 & u_nu_3 & ... & u_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \textit{ es una matriz simétrica de orden } n \times n.$$

4) Una matriz postmultiplicada por un vector columna es un vector columna.

5) Un vector fila postmultiplicado por una matriz es un vector fila.

6) La multiplicación de matrices es asociativa, es decir

$$(\underset{M\times N}{A}\ \underset{N\times P}{B})\underset{P\times K}{C} = \underset{M\times N}{A}(\underset{N\times P}{B}\ \underset{P\times K}{C})$$

7) La multiplicación de matrices es distributiva con respecto a la suma

$$A(B+C) = AB + AC \qquad y \qquad (B+C)A = BA + CA$$

1.3.3 Transposición de matrices

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times 3}{A'} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Propriedades de la transposición de matrices:

1) La transposición de una matriz transpuesta es la misma matriz original

$$(A')' = A$$

2) $C = A + B$ $\qquad C' = (A + B)' = A' + B'$

3) Si AB es definido, $(AB)' = B'A'$

4) La transpuesta de un matriz identidad es la matriz identidad misma

5) Si A es una matriz cuadrada tal que $A = A'$, entonces A es una matriz simétrica.

6) La transpuesta de un escalar es el escalar mismo. Por tanto, si λ es un escalar

$$\lambda' = \lambda$$

7) La transpuesta de $(\lambda A)'$ es $\lambda A'$, donde λ es un escalar.

1.4 Determinantes

1.4.1 Evaluación de un determinante de 2 × 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

1.4.2 Evaluación de un determinante de 3 × 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Propriedades de los determinantes

1) Una matriz cuyo determinante tiene un valor de cero se denomina una matriz singular

2) Si todos los elementos de cualquier fila de A son cero, su determinante es cero.

3) Los determinantes de A y de A transpuesta son los mismos: $|A'| = |A|$

4) Si cada elemento de una fila o de una columna es multiplicado por un escalar ϕ, entonces $|A|$ es multiplicado por ϕ.

5) Si cualquier fila (columna) de una matriz es una combinación lineal de otras filas (columnas), su determinante es cero. Por tanto, si una fila o una columna de una matriz es un multiple de otra fila o columna de esa matriz, su determinante es cero.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad |A| = 0.$$

6) $|AB| = |A|\,|B|$

1.4.3 Rango de una matriz

El rango de una matriz es el orden de la submatriz cuadrada más grande cuyo determinante no sea cero.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad |A| = 0$$

A es una matriz singular. Aunque su orden es 3×3, su rango es de 2, puesto que se puede encontrar una submatriz 2×2 cuyo determinante no es cero. Por ejemplo, si se borran la primera fila y la primera columna de A, se obtiene

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad |B| = 18$$

Si se borra la fila $i$ésima y la columna $j$ésima de una matriz $N \times N$, el determinante de la submatriz resultante se denomina el **menor** del elemento a_{ij}; y se denota $|M_{ij}|$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El menor de a_{11}es $\qquad |M_{11}| = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

El **cofactor** del elemento a_{ij} de una matriz A $N \times N$, denotado c_{ij}, está definido como:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Reemplazando los elementos a_{ij} de una matriz A por sus cofactores, se obtiene la **matriz de cofactores** de A, denotada por (cof A).

La **matriz adjunta** (adj A) es la transpuesta de la matriz de cofactores.

1.5 Inversa de una matriz cuadrada

1) Encontrar el determinante de A. Si es diferente de cero, procédase al paso 2.

2) Reemplazar cada elemento a_{ij} de la matriz A por su cofactor para obtener la matriz de cofactores (cof A)

3) Transponer la matriz de cofactores para obtener la matriz adjunta

4) Dividir cada elemento de la matriz adjunta por $|A|$.

Entonces, si A es cuadrada y no singular (es decir, $|A| \neq 0$), su inversa A^{-1} se encuentra de la manera siguiente:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, (adj \; A)$$

Propriedades de la matrices inversas

1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ siempre y cuando A y B no sean singulares

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

3) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

4) $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

1.6 Diferenciación matricial

1.6.1 Regla 1

$$a'x = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

$$\frac{\partial(a'x)}{\partial x} = \frac{\partial(x'a)}{\partial x} = a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix}$$

1.6.2 Regla 2: Caso donde A es una matriz simétrica

$$x'Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x} = 2Ax$$

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x_1} = 2\ (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)$$

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x_2} = 2\ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)$$

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x_n} = 2\ (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{nn}x_n)$$

1.6.3 Regla 3: Caso donde A es una matriz non-simétrica

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x} = (A + A')\ x$$