Universitat Autònoma de Barcelona
Curs 2013-2014
Macroeconomia I

Lista de problemas 2.1

I. Preguntas multirespuesta

1.	d	6.	d	11.	d
2.	d	7.	c	12.	b
3.	b	8.	c	13	c
4.	d	9.	a	14	d
5.	d	10.	c	15.	c

II. Ejercicios

1. Respuestas:

   a) Rendimientos constantes a escala significa que la cantidad de todos los input aumenta en una proporción determinada, digamos z, el output debería aumentar en esta misma proporción z:

   $$F\left(zK, zL\right) = \left(zK\right)^{\alpha}\left(zL\right)^{1-\alpha} = z^{\alpha+1-\alpha}K^{\alpha}L^{1-\alpha} = zF(K,L)$$

   b) La productividad marginal del capital viene dada por:

   $$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$$

   Dado que $0 < \alpha < 1$, naturalmente $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ será siempre positivo. La segunda derivada con respecto al capital viene dada por:

   $$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial^2 K} = \alpha\left(\alpha-1\right)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha} = \left(\alpha^2-\alpha\right)\frac{1}{K}\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$$

   Una vez más, dado que $0 < \alpha < 1$, esto implica que $\alpha^2 - \alpha$ será siempre negativo. Dado que $\frac{1}{K}\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$ será siempre positivo para $K > 0$, entonces $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial^2 K} < 0$ para $K > 0$. Es decir, la productividad marginal del capital es decreciente.

La productividad marginal del trabajo viene dada por:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha} = (1-\alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

Aplicando el mismo razonamiento que con el capital, esta expresión solo puede ser positiva. La segunda derivada con respecto al trabajo viene dada por:

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial^2 L} = -\alpha (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha-1} = \left(\alpha^2 - \alpha\right) \frac{1}{L} \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

Dado que $\alpha^2 - \alpha$ será siempre negativo, la productividad marginal del trabajo es decreciente.

c) Condiciones de Inada:

1) $F(0,0) = 0$:

$$F(0,0) = 0^{\alpha} 0^{1-\alpha} = 0$$

2) La función es continua y diferenciable: obvio.

3) La función es estrictamente creciente en cada input: Vea $1b$

4) La segunda derivada de la función es decreciente para cada input: Vea $1b$

5) El límite de la primera derivada tiende a infinito cuando el input tiende a 0:

$$\lim_{K \to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim_{K \to 0} \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{L \to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \lim_{L \to 0} (1-\alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = +\infty$$

6) El límite de la primera derivada tiende a cero cuando el input tiende a infinito:

$$\lim_{K \to +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim_{K \to 0} \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} = 0$$

$$\lim_{L \to +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \lim_{L \to 0} (1-\alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = 0$$

2. La productividad marginal del capital viene dada por:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha \frac{Y}{K}$$

	Trabajo	Capital	Output	Inversión
t_0	1	3	$Y_0 = 1000 \cdot 3^{0,3} \cdot 1^{0,7}$ $= 1390{,}39$	$I_0 = sY_0$ $= 0{,}3 \cdot 1390{,}39$ $= 417{,}12$
t_1	1	$K_1 = (1-\delta) K_0 + I_0$ $= 0{,}9 \cdot 1390{,}39 + 417{,}12$ $= 419{,}82$	6122.35	1836.70
t_{10}	1	27399.41	21444.82	6433.45
t_{100}	1	92638.11	30905.58	9271.67
t_{200}	1	92750.38	30916.81	9275.04
t_{500}	1	92750.46	30916.82	9275.05

La productividad marginal del trabajo viene dada por:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha} = (1-\alpha) \frac{Y}{L}$$

3. Vea la siguiente tabla:

4. Respuestas:

   a) Para encontrar el output per capita y, dividimos el output total por el número de trabajadores:

$$y = \frac{k^{\alpha} \left[(1-u^{\star}) L\right]^{-\alpha}}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} (1-u^{\star})^{1-\alpha} = k^{\alpha} (1-u^{\star})^{1-\alpha}$$

   dónde en el último paso se usa la definición: $k = \frac{K}{L}$. Fijase que el desempleo reduce la cantidad de output per capita para cualquier ratio de capital-trabajador porque algunos trabajadores no están produciendo nada. El estado estacionario es ese nivel de capital por trabajador en que el incremento en capital per capita es exactamente igual a la pérdida de capital generada por la depreciación y el crecimiento de la población:

$$\begin{aligned} sy^{\star} &= (\delta + n) k^{\star} \\ s (k^{\star})^{\alpha} (1-u)^{1-\alpha} &= (\delta + n) k^{\star} \\ k^{\star} &= (1-u^{\star}) \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

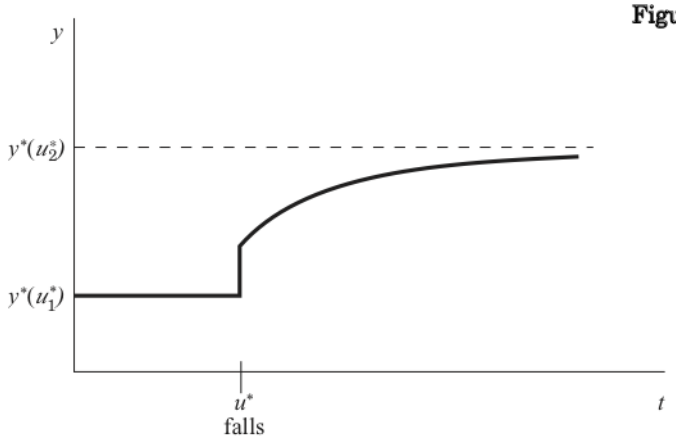
   El desempleo reduce la productividad marginal del capital y, por lo tanto, actúa como un shock tecnológico negativo que reduce la cantidad de capital que la eco-

nomía es capaz de acumular en el estado estacionario. Para obtener el nivel de output del estado estacionario basta con sustituir en la función de producción la expresión del capital el el estado estacionario:

$$y^{\star} = \left((1-u^{\star}) \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{\alpha} (1-u^{\star})^{1-\alpha} = (1-u^{\star}) \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

b) La figura 7–5 muestra la evolución del output a través del tiempo. En el momento en que el desempleo pasa de u_1 a u_2, el output aumenta respecto su nivel inicial en el estado estacionario $y^{\star}(u_1)$. La economía tiene el mismo nivel de capital (ajustar el stock de capital requiere tiempo), pero este capital es usado por más trabajadores. En este momento la economía esta fuera del estado estacionario: el nivel de capital es demasiado bajo dado el número de trabajadores. La transición se inicia acumulando más capital, lo cual incrementa el output aún más. Con el tiempo el output y el nivel de capital convergen en un nuevo estado estacionario en el cual el nivel de output es mayor.

Figure 7–5



5. Respuestas:

a) Primero calculamos el capital per capita en el estado estacionario inicial:

$$\begin{aligned} sf(k_i) &= (\delta + n) k_i \\ 0{,}25 \cdot 1000 k_i^{0{,}3} &= (0{,}1 + 0{,}02) k_i \\ \frac{250}{0{,}12} &= (k_i)^{0{,}7} \\ k_i &= \left(\frac{250}{0{,}12} \right)^{\frac{1}{0{,}7}} = 55091{,}42 \end{aligned}$$

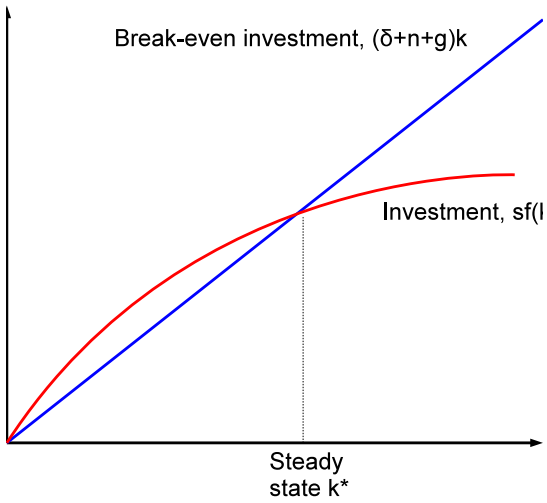
La expresión anterior nos indica que el output per capita en el estado estacionario será: $y_i = 1000\,(k_i)^{0,3} = 1000\left(\left(\frac{250}{0,12}\right)^{\frac{1}{0,7}}\right)^{0,3} = 26440$. Ahora asumimos que el factor de productividad total (TFP) incrementa un 10 %, el nivel de capital per capita en el nuevo estado estacionario será: $k_f = \left(\frac{275}{0,12}\right)^{\frac{1}{0,7}} = 63127,17$. El nuevo output per capita será: $y_f = 1100\,(k_f)^{0,3} = 1100\left(\left(\frac{275}{0,12}\right)^{\frac{1}{0,7}}\right)^{0,3} = 30301$. Es decir, un incremento del 10 % en el TFP conlleva un incremento del 14.6 % en el output per capita de esta economía.

b) Suponga que el incremento en TFP se produce con el capital constante. En este caso el output por trabajador vendrá dado por: $y_{\text{constant k}} = 1100\,(k_i)^{0,3} = 1100\left(\left(\frac{250}{0,12}\right)^{\frac{1}{0,7}}\right)^{0,3} = 29088$. Este calculo indica que el incremento en TFP genera un incremento del output por trabajador del 10 %. Ahora, asuma que el TFP no cambia mientras que el nivel de capital incrementa como si el TFP hubiera cambiado. El output por trabajador seria: $y_{\text{constant TFP}} = 1000\,(k_f)^{0,3} = 1000\left(\left(\frac{275}{0,12}\right)^{\frac{1}{0,7}}\right)^{0,3} = 27546$, que implica un incremento del output por trabajador de alrededor del 4.6 %. En conclusión, aproximadamente el 70 % del incremento en output por trabajador es puramente debido al cambio tecnológico mientras que el restante 30 % es debido a la mayor acumulación de capital que induce el cambio tecnológico.

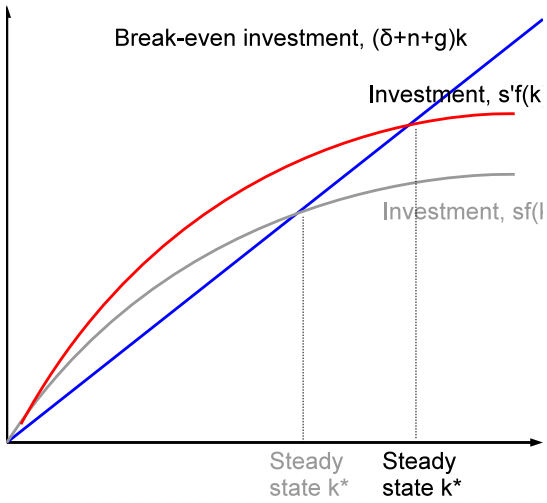
c) El ejemplo ilustra muy bien los mecanismos importantes en el modelo de Solow. Después de un cambio en el TFP, el output aumenta. Dado que la ratio de ahorro es constante, esto genera un incremento en la inversión por trabajador. El incremento en la inversión se va convirtiendo poco a poco en un aumento del capital por trabajador hasta que la economía se encuentra en el nuevo estado estacionario. En resumen, el cambio en TFP no solo hace más productivos los inputs de producción sino que también induce la economía a acumular más capital.

6. Respuestas:

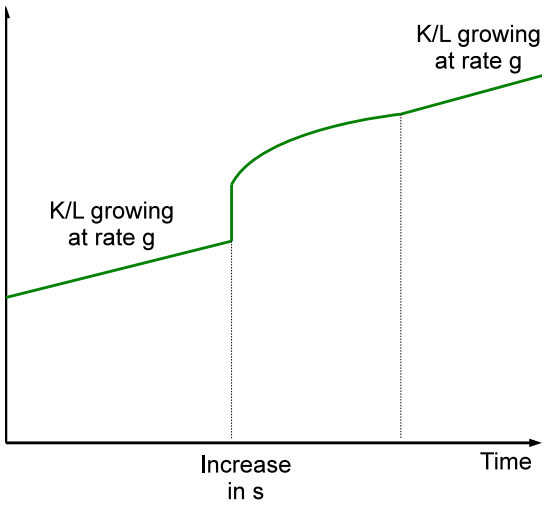
a) Figura:



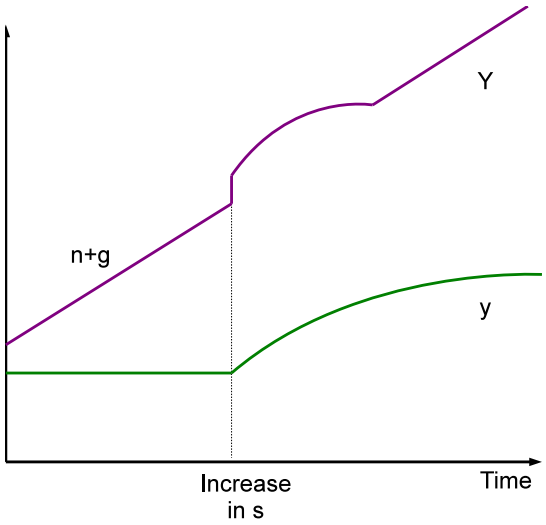
b) El capital por trabajador eficiente aumentará:



c) El capital por trabajador crece a ratio g en el estado estacionario. Recuerde que el capital por trabajador eficiente es constante en el estado estacionario. Después del incremento en el ratio de ahorro, el capital por trabajador incrementa a un ritmo mayor que g, hasta que vuelve al ritmo de crecimiento en el estado estacionario:



d) El output por trabajador eficiente (y) incrementará debido al aumento en el capital por trabajador eficiente que ha generado el cambio en el ratio de ahorro. El output total (Y) crece a una tasa de $n+g$, el cambio en la ratio de ahorro afectará el nivel del output pero no su tasa de crecimiento en el estado estacionario:



7. Respuestas:

a)

$$\frac{Y}{L} = 1000K^{0,3}L^{1}L^{-0,3}\frac{1}{L} \Rightarrow y = 1000k^{0,3}$$

b) Estadio estacionario implica que el nivel de capital por trabajador es constante ($\triangle k = 0$):

$$\begin{aligned} \triangle k &= sf(k) - \delta k \\ 0 &= s1000k_{ss}^{0,3} - \delta k_{ss} \\ k_{ss} &= \left(1000\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{10}{7}} \end{aligned}$$

c) Recuerde que la regla de oro del nivel de capital es aquella que maximiza el consumo. Del problema de optimización de un planificador benevolente se obtiene que la condición suficiente de la regla de oro es $MPK = \delta$, entonces:

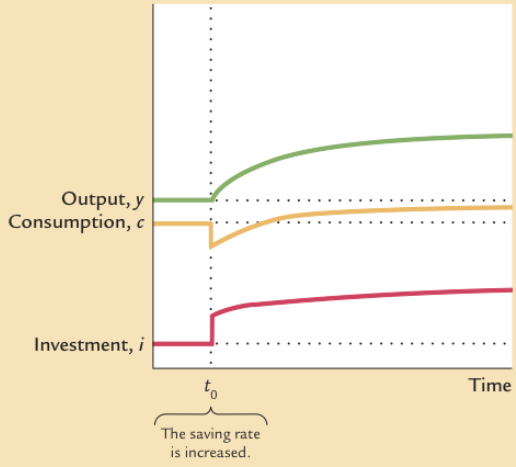
$$\begin{aligned} f'(k_{gold}) &= \delta \\ 300k_{gold}^{-0,7} &= \delta \\ k_{gold} &= \left(\frac{300}{\delta}\right)^{\frac{10}{7}} \end{aligned}$$

d) Para asegurarnos que en el estado estacionario se cumplirá la regla de oro, solo hay que imponer la condición $k_{ss} = k_{gold}$:

$$\begin{aligned} \left(1000\frac{s_{gold}}{\delta}\right)^{\frac{10}{7}} &= \left(\frac{300}{\delta}\right)^{\frac{10}{7}} \\ s_{gold} &= 0{,}3 \end{aligned}$$

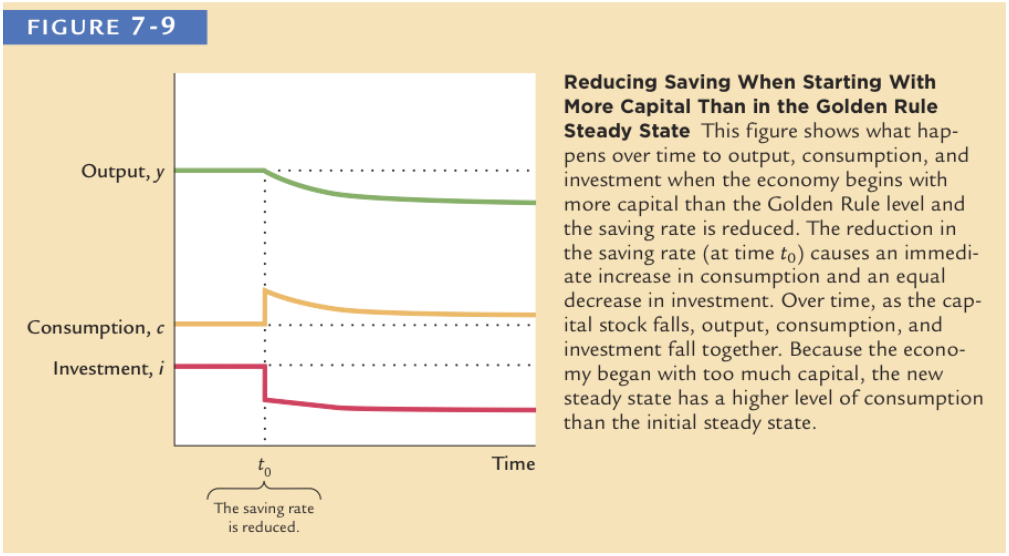
e) El gobierno necesitaría aumentar la tasa de ahorro:

FIGURE 7-10



Increasing Saving When Starting With Less Capital Than in the Golden Rule Steady State This figure shows what happens over time to output, consumption, and investment when the economy begins with less capital than the Golden Rule level and the saving rate is increased. The increase in the saving rate (at time t_0) causes an immediate drop in consumption and an equal jump in investment. Over time, as the capital stock grows, output, consumption, and investment increase together. Because the economy began with less capital than the Golden Rule level, the new steady state has a higher level of consumption than the initial steady state.

f) El gobierno necesitaría reducir la tasa de ahorro:



8. Respuestas:

a) Estado estacionario implica que el nivel de capital por trabajador eficiente es constante ($\triangle k = 0$):

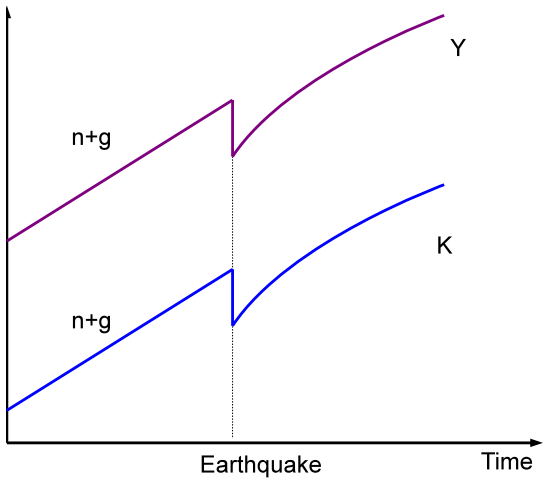
$$\triangle k = sf(k) - (\delta + n + g)k$$

$$0 = sk_{ss}^{\alpha} - (\delta + n + g)k_{ss}$$

$$k_{ss} = \left(\frac{\delta + n + g}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

b) El output total crece a una tasa de $n + g$, mientras el output per capita crece a una tasa g.

c) Si los parámetros fundamentales de ahorro y tecnología no cambian, lo que pasara es que la economía experimentará una pérdida de PIB durante un tiempo hasta que el nivel de capital vuelva a ser el del estado estacionario:



d) Si el capital se deprecia a una tasa mayor, sin cambios en la tasa de ahorro, la economía acabará con menos capital por trabajador eficiente y, entonces, menos output per capita. Una vez más, esto afectará tanto el nivel de capital total como el nivel de output total pero no su tasa de crecimiento en estado estacionario.

9. Respuestas:

a)

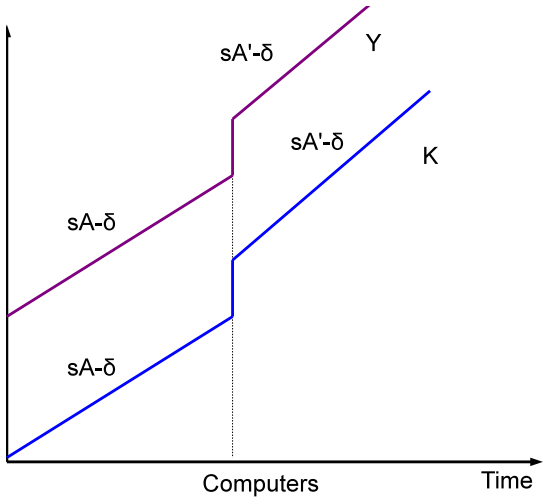
$$\begin{aligned}\triangle K =& sY - \delta K \\ \triangle K =& sAK - \delta K \\ \frac{\triangle K}{K} =& sA - \delta\end{aligned}$$

b) La tasa de crecimiento de la producción viene dada por:

$$\frac{\triangle Y}{Y} = \frac{\triangle A}{A} + \frac{\triangle K}{K}$$

Dado que no hay progreso técnico, el output solo puede aumentar si crece el capital.

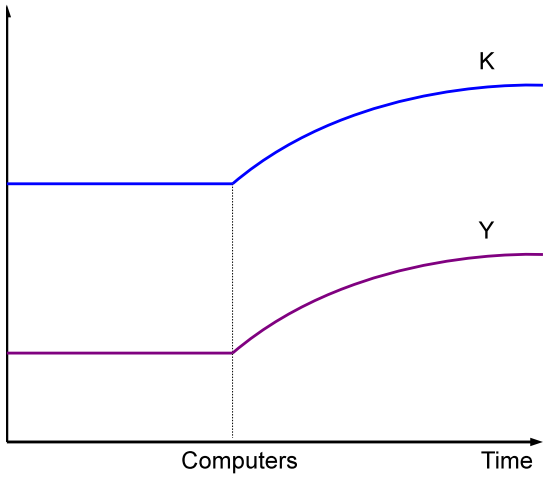
c) En esta economía $\frac{\triangle Y}{Y} = \frac{\triangle K}{K} = sA - \delta$, es decir, un cambio positivo en A aumentará tanto el output como el capital:



d) Respuestas:

1) Sin progreso técnico, en el estado estacionario, ni el capital ni el output crecerán.

2) Los ordenadores solo generarán un cambio en el nivel de capital y output del estado estacionario:



10. Suponga que la economía empieza con un nivel de capital de estado estacionario por debajo de la regla de oro. El efecto inmediato de dedicar una mayor parte del output a ahorro es que se dedica menos parte al consumo, es decir, los niveles de vida medidos en términos de consumo bajarán. Una tasa de ahorro más alta implica que el stock de

capital aumenta más rápidamente, por lo tanto, la tasa de crecimiento del output y el output por trabajador aumentarán. La productividad de los trabajadores es lo que cada trabajador en media produce, es decir, el output por trabajador. Por lo tanto, la productividad aumenta. Es decir, el efecto inmediato es que la productividad crece y los niveles de vida bajan. En el nuevo estado estacionario, el output crece a una tasa de $n + g$, mientras el output por trabajador crece a una tasa de g. Esto indica que en el estado estacionario, la productividad es independiente del nivel de ahorro. Como empezamos con un nivel de capital por debajo de la regla de oro, el nivel de ahorro más alto implica que en el nuevo estado estacionario los niveles de consumo serán más altos. Es decir, el cambio en el nivel de ahorro afecta la productividad en el corto plazo pero no tiene efecto a largo plazo. Es decir esta frase pone el énfasis en el crecimiento, pero no en el sacrificio, en términos de consumo, que hay que acometer para lograrlo.

11. Respuestas:

a)

$$\frac{Y}{L} = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}L^{-1} = Ak^{\alpha}$$

b) Primero calculamos el nivel de capital en el estado estacionario:

$$\begin{aligned} \triangle k =& sf\left(k_{ss}\right) - \left(\delta + n + g\right)k_{ss} \\ 0 =& sAk_{ss}^{\alpha} - \left(\delta + n + g\right)k_{ss} \\ k_{ss} =& \left(\frac{sA}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Ahora, output por trabajador en el estado estacionario:

$$y_{ss} = A\left(\frac{sA}{\delta + n + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = A^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Fácilmente podemos obtener el ratio entre el nivel de ingreso en los dos países

(asumiendo que los dos están el el estado estacionario):

$$\begin{aligned}
\frac{y_R}{y_P} =& \frac{A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{s_R}{\delta_R+n_R+g_R}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{s_P}{\delta_P+n_P+g_P}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \\
\frac{y_R}{y_P} =& \frac{\left(\frac{s_R}{\delta+n_R+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s_P}{\delta+n_P+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \\
\frac{y_R}{y_P} =& \left(\frac{s_R\left(\delta+n_P+g\right)}{s_P\left(\delta+n_R+g\right)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

c)

$$\frac{y_R}{y_P} = \left(\frac{s_R\left(\delta+n_P+g\right)}{s_P\left(\delta+n_R+g\right)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{0.32\left(0.05+0.03+0.02\right)}{0.1\left(0.05+0.01+0.02\right)}\right)^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = 2$$

El ingreso en Ricolandia es 2 veces mayor que en Pobrelandia.

d) Sí, para replicar un diferencial 16 veces mayor, $\alpha = \frac{2}{3}$. Esto indicaría que en la función de producción la relativa importancia del capital respecto al trabajo sería mayor. Dado que Ricolandia es capaz de acumular más capital por trabajador que Pobrelandia, esta explicaría el aumento en la diferencia Otro factor que podría explicar las diferencias entre los dos países es el nivel de TFP. En este ejemplo se asume que los dos países es el mismo, pero sería perfectamente imaginable que en Ricolandia los factores de producción fueran más eficientes que en Pobrelandia.