

# Matemàtiques per a Economistes II

Curs 2008-2009

María Calle, Antoni Ferragut i Jordi Massó

## 1 Llista de problemes 1

**1.1.-** Calculeu la norma dels següents vectors:

- (a)  $\vec{v} = (1, 2)$       (b)  $\vec{v} = (3, 4)$       (c)  $\vec{v} = (-1, 2)$   
(d)  $\vec{v} = (-1, 0, 3)$     (e)  $\vec{v} = (-2, -1, -3)$     (f)  $\vec{v} = (0, 0, -3)$   
(g)  $\vec{v} = (1, 2, -1, 4)$     (h)  $\vec{v} = (3, 0, -2, 8)$     (i)  $\vec{v} = (-1, 6, -2, 4)$ .

**1.2.-** Calculeu la distància entre les següents parelles de punts:

- (a)  $p = 3, q = 1$       (b)  $p = (1, 2), q = (1, -2)$   
(c)  $p = (1, 2), q = (-2, 3)$     (d)  $p = (0, 1), q = (-1, -2)$   
(e)  $p = (3, 2), q = (-3, -2)$     (f)  $p = (1, 1), q = (6, 3)$   
(g)  $p = (1, 0, 3), q = (-1, -1, 2)$     (h)  $p = (1, 1, -1), q = (1, 0, 3)$   
(i)  $p = (1, -1, 0, 6), q = (1, 2, 1, 0)$     (j)  $p = (0, 0, 0), q = (1, 1, 1)$ .

**1.3.-** Calculeu el producte escalar entre les següents parelles de vectors:

- (a)  $\vec{v} = (1, 2), \vec{w} = (3, 4)$       (b)  $\vec{v} = (0, 1), \vec{w} = (1, -1)$   
(c)  $\vec{v} = (1, 1), \vec{w} = (1, -1)$     (d)  $\vec{v} = (2, 1), \vec{w} = (4, 2)$   
(e)  $\vec{v} = (3, -1), \vec{w} = (-1, 2)$     (f)  $\vec{v} = (2, 0), \vec{w} = (0, 1)$   
(g)  $\vec{v} = (1, 0, 2), \vec{w} = (1, 2, 1)$     (h)  $\vec{v} = (-1, 1, 1), \vec{w} = (2, 0, 2)$   
(i)  $\vec{v} = (1, 7, -2), \vec{w} = (0, -2, -1)$     (j)  $\vec{v} = (0, 1, 3), \vec{w} = (2, 0, 0)$ .

**1.4.-** Decidiu si els següents conjunts són oberts, tancats, fitats i/o compactes (decidiu vol dir *justifiqueu* i, en els casos en que sigui possible, demostreu):

- (a) L'interval  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ .
- (b) Els eixos de coordenades a  $\mathbb{R}^2$ .
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$ .
- (d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$ .
- (e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
- (f)  $\{(0, 1) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- (g)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x + 1, x \leq 1, y \geq -x - 1\}$ .
- (h)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$ .
- (i)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ .
- (j)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ .
- (k)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 9\}$ .
- (l)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2, y - x^2 \geq 0\}$ .
- (m)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^3 > 0, x < 1, y < 1\}$ .
- (n)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - e^x \geq 0, x \geq 0, y + x^2 - 2 \leq 0\}$ .
- (o)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 2, y + 2 - x \geq 0, y - \ln x \leq 0\}$ .

**1.5.-** Recordeu que un conjunt convex és aquell que, per a tota parella de punts  $x, y$  del conjunt, el segment que els uneix també està inclòs en el conjunt. Digueu si el conjunt  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$  és o no un conjunt convex.

**1.6.-** Recordeu que una funció és convexa si, i només si, el seu *hipèrgraf* (el que hi ha per sobre de la gràfica de la funció) és un conjunt convex. També, la funció és còncava si, i només si, el seu *hipògraf* (el que hi ha per sota de la funció) és un conjunt convex. Fent servir aquest criteri decideu quins dels següents conjunts són convexos.

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2\}$ .
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^{2x}\}$ .
- (d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leq 2\}$ .
- (e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^4 + 2x^2 - x - 3\}$ .
- (f)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \sin(x)\}$ .
- (g)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^3\}$ .

- (h)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{x^2}\}.$
- (i)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y^2 + 1)x \geq 1, y \geq x^2\}.$
- (j)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq -y^6 - 3x^2 + 12, y \geq 4\}.$

**1.7.-** Siguin  $A$  i  $B$  dos conjunts convexos de  $\mathbb{R}^n$ . Definim el conjunt  $A + B$  com (fixeu-vos que no és la unió):

$$A + B = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = x + y \text{ on } x \in A \text{ i } y \in B\}.$$

Demostreu que  $A+B$  és un conjunt convex.

**1.8.-** Les rectes i plans de  $\mathbb{R}^3$ , són conjunts convexos? I les seves interseccions?

## 2 Llista de problemes 2

**2.1.-** Considerem les funcions  $f(x, y) = x^2 - \sin xy$  i  $g(x, y, z) = (x - y, y + \ln z)$ . Calculeu  $f(1, 0)$ ,  $g(0, -1, e)$ ,  $g(t, t + 1, t - 1)$  i  $f(a, b)$ .

**2.2.-** Calculeu el domini (natural) de les següents funcions i digueu com són aquests conjunts:

- (a)  $f(x, y) = x^2 - \ln xy.$
- (b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$
- (c)  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$
- (d)  $f(x, y) = \sqrt{x - y}.$
- (e)  $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}.$
- (f)  $f(x, y) = e^{x/y}.$
- (g)  $f(x, y) = \ln(\frac{x}{y}).$
- (h)  $f(x, y) = xe^{\frac{1}{y}}.$
- (i)  $f(x, y, z) = \frac{z^2 + 1}{x + y}.$

**2.3.-** Calculeu analítica i geomètricament les corbes de nivell de les següents funcions de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ .

- (a)  $f(x, y) = x + y.$

- (b)  $f(x, y) = x - 2y$ .
- (c)  $f(x, y) = x^2 - 2y$ .
- (d)  $f(x, y) = x - y^2$ .
- (e)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .
- (f)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .
- (g)  $f(x) = \min\{x, y\}$ .
- (h)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .
- (i)  $f(x, y) = x^2y$ .

**2.4.-** Una de les principals utilitats de les corbes de nivell és que ens proporcionen informació de la funció en el seu domini. Dibuixeu les corbes de nivell per a les següents funcions definides en els conjunts donats. Amb el resultat obtingut podem justificar l'existència de màxims i/o mínims? En cas afirmatiu, com els trobaríeu?

- (a)  $f(x, y) = 3x - y$  en  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, y + x - 5 \leq 0\}$ .
- (b)  $f(x, y) = 2x - y$  en  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ .
- (c)  $f(x, y) = x + y$  en  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 3x - 9 \geq 0\}$ .
- (d)  $f(x, y) = \min\{x, y\}$  en  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, y + 5x - 10 \leq 0\}$ .

**2.5.-** Estudieu els límits direccionals de les següents funcions en els punts i direccions que s'indiquen.

- (a)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  en el punt  $(0, 0)$  i la direcció  $x = y$ .
- (b)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  en el punt  $(0, 0)$  i en qualsevol direcció  $x = my, m \in \mathbb{R}$ .
- (c)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}$  en el punt  $(0, 0)$  i en qualsevol direcció  $x = my, m \in \mathbb{R}$ .
- (d)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  en el punt  $(0, 0)$  i les direccions  $x = y, x = 0$  i  $y = x^2$ .
- (e)  $f(x, y, z) = \frac{xy + yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2}$  en el punt  $(0, 0, 0)$  i la direcció  $x = y, y = z$ .

**2.6.-** Com ja sabeu, el criteri dels límits direccionals permet provar si una funció *no* és contínua en un punt però no permet decidir quan és contínua. En altres paraules, no podem “esgotar” totes les (infinites) direccions per les quals podem apropar-nos a un punt de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . En aquest marc de referència, demostreu la continuïtat o no (en els punts “conflictius”) de les següents funcions, i indiqueu en quins casos el criteri dels límits direccionals no us permet decidir-ho.

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^5}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**2.7.-** A l'exercici anterior hem posat èmfasi en l'estudi dels punts on una funció pot tenir punts de discontinuïtat. No obstant això, cal tenir clar que les funcions que nosaltres considerarem seran contínues a tot arreu excepte, potser, en algun punt molt localitzat (zeros del denominador, nombres negatius en un logaritme, etc.). A més, la suma, producte i composició de funcions contínues és també una funció contínua. Usant aquests fets, proveu que les funcions següents són contínues en tot el seu domini.

$$(a) f(x, y) = x + y.$$

$$(b) f(x, y) = e^{x-y^2}.$$

$$(c) f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

$$(d) f(x, y, z) = e^{xy-z^2} + 2xy \sin z.$$

$$(e) f(x, y) = \min\{2x, 3y\}.$$

$$(f) f(x, y) = \frac{x^2 y}{y^2 + 1}.$$

**2.8.-** Sigui  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida com  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ . Demostreu que la funció assoleix un màxim i un mínim absoluts en el subconjunt del seu domini  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2 + y^2 \leq 1\}$ . Trobeu-los.

**2.9.-** Fent ús de les corbes de nivell i del Teorema de Weierstrass, localitzeu geomètricament els màxims i mínims absoluts de les funcions següents en els dominis (artificials) que es proposen.

$$(a) f(x, y) = xy \text{ en el conjunt } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, x, y > 0\}.$$

$$(b) f(x, y) = x - y^2 \text{ en el conjunt } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

$$(c) f(x, y) = \min\{x, y\} \text{ en el conjunt } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \leq 1, x, y > 0\}.$$

**2.10.-** Sovint els problemes econòmics venen descrits per situacions i no formulats com un problema matemàtic. És, per tant, important saber traduir aquestes situacions al llenguatge matemàtic. Per a les següents situacions, planteja el problema matemàtic a resoldre:

1. Un forn de pa està especialitzat en tres tipus de pa diferent: el de xapata, el d'oliva i el de pagès. Per cada barra de xapata es guanya 1 euro, per cada baguette de pa d'oliva es guanyen 2 euros i per cada pa de pagès 1.5 euros. El propietari vol determinar la quantitat òptima de la producció per obtenir el màxim benefici diari. No obstant, existeixen unes limitacions de pressupost i temps diari invertits. El preu de cost d'una peça de pa de xapata és de 0.25 euros, d'una peça d'oliva és de 0.75 euros i d'una peça de pa de pagès de 0.50 euros. I tota la inversió diària no pot superar els 300 euros.

Tanmateix, el temps de preparació i cocció també ve caracteritzat pel tipus de pa. Així, per 5 barres de xapata és tarden 8 minuts, per 3 d'oliva 10 minuts i per 2 de pa de pagès 9 minuts. I el temps total que es pot utilitzar per preparar tots els productes no pot superar les 4 hores.

2. Una empresa ha decidit reduir les despeses derivades dels seus treballadors perquè està passant una mala època. En lloc de reduir privilegis dels seus treballadors com poden ser les màquines de cafè gratuït o els tickets dels dinars, ha decidit reduir la plantilla. Hi ha tres tipus de treballador que estan classificats respecte el seu nivell d'estudis: llicenciats, amb màster i sense llicenciatura (amb contracte de pràctiques). Hi ha 100 llicenciats, 150 amb màster i 50 sense llicenciatura. Les despeses derivades per cada tipus són respectivament 10, 20 i 15. És més, cada tipus de treballador fa guanyar una quantitat fixa a l'empresa: 20 el llicenciats, 25 el que tenen màster i 15 els no llicenciats.

La empresa vol que la suma de les persones afectades per la reducció de personal sigui com a molt 100. A part, també vol que el nivell de beneficis sempre sigui superior a 8000. Quantes persones es veuran afectades per a decisió de l'empresa?

### 3 Llista de problemes 3

**3.1.-** Calculeu totes les funcions derivades parcials de les següents funcions:

(a)  $f(x, y) = x^2 - \cos xy$ .

(b)  $f(x, y, z) = y + \ln zyx$ .

(c)  $f(x, y) = e^{x+y} - e^{xy}$ .

(d)  $f(x, y, z, t) = xyz^2 + t^2$ .

(e)  $f(x, y) = x^2 + 10$ .

(f)  $f(x, y) = \sin^2 x + e^y$ .

Obtingueu també les derivades parcials en els punts  $(0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  ó  $(0, 1, 0, 1)$  segons correspongui.

**3.2.-** Considerem les funcions  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $g(x, y) = x + y$  i  $h(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ . Dibuixeu algunes corbes de nivell per aquestes tres funcions. Denotem  $p = (2, 4)$  i  $q = (3, 1)$ . Respon les següents preguntes:

(a) Quina informació ens donen les corbes respecte al signe que tenen les derivades parcials d'aquestes funcions en els punts  $p$  i  $q$ ?

(b) Responen a la pregunta anterior calculant de manera efectiva les derivades parcials.

**3.3.-** Calculeu la derivada direccional de les funcions en els punts que són indicats i en la direcció del vector corresponent.

(a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $p = (1, 1)$ ,  $v = (1, -1)$ .

(b)  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $p = (1, 1, 0)$ ,  $v = (1, -1, 0)$ .

**3.4.-** Calculeu els vectors gradient de les funcions dels problemes anteriors. Obtingueu els vectors gradient als punts  $(1, 2)$ ,  $(0, 1, -1)$  i  $(1, 2, 3, 4)$  segons correspongui.

**3.5.-** Considereu la funció  $f(x, y) = xy$ . Calculeu el vector gradient en un punt qualsevol. Calculeu el vector gradient en els punts  $(1, 1)$  i  $(-1, -1)$ . Mostreu gràficament que tenen la propietat de ser perpendiculars a les rectes tangents a les corbes de nivell de la funció en el punt corresponent, i d'apuntar en la direcció de màxim creixement de la funció.

**3.6.-** Calculeu els plans tangents a les gràfiques de les funcions següents en els punts que s'indica:

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $p = (1, 1)$ .

(b)  $f(x, y) = \ln x - y^2$ ,  $p = (e, 1)$ .

(c)  $f(x, y) = \cos xy$ ,  $p = (0, 0)$ .

(d)  $f(x, y) = x + y$ ,  $p = (0, 0)$ .

**3.7.-** Considereu la primera funció de l'exercici anterior. Calculeu  $f(1.26, 0.98)$ . Calculeu la imatge del punt per la funció (lineal) descrita pel pla tangent. Compareu i doneu una explicació. Feu el mateix per a les altres dues funcions en els punts  $(3, 1.1)$  i  $(0.1, -0.1)$  respectivament.

**3.8.-** Calculeu les derivades parcials de segon ordre en un punt qualsevol de les següents funcions:

(a)  $f(x, y) = x^2 + \ln y^2$ .

(b)  $f(x, y) = e^{x-y^2}$ .

(c)  $f(x, y, z) = xyz - z^2 + y^2 + 2x^2$ .

**3.9.-** Sigui  $x$  un índex de la quantitat total de bens produïts i consumits en una societat i  $z$  una mesura del nivell de contaminació. Si  $u(x, z)$  mesura el benestar total de la societat (i aquesta no és una funció fàcil de calcular), quins signes són els que es podrien esperar per  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, z)$  i  $\frac{\partial u}{\partial z}(x, z)$ ? quina penseu que podria ser la hipòtesi que fan els economistes sobre el signe de  $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}(x, z)$ .

**3.10.-** Una empresa fabrica un producte, en quantitat  $Q$ , amb un cost total de

$$C(Q) = 100 + \frac{Q^2}{10} - 5q.$$

El preu d'aquest producte és 20 u.m. Per a  $Q = 50$ , trobeu el cost marginal, l'ingrés marginal i el benefici marginal.

**3.11.-** Diem que una funció de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  és homogènia de grau  $r$  si  $f(tx, ty) = t^r f(x, y)$  per a tot  $t \in \mathbb{R}$ . Demostreu que, si les derivades parcials de  $f$  són contínues, llavors  $f$  és homogènia de grau  $k$  si i només si

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k f(x, y).$$

*Indicació:* Aquest resultat és conegut amb el nom de Teorema d'Euler per a funcions homogènies. Per provar la implicació ( $\Leftarrow$ ) cal fer servir la funció auxiliar  $g(t) = t^{-k} f(tx, ty) - f(x, y)$ .

**3.12.-** Estudieu si les següents funcions són homogènies i de quin grau ho són.

- (a)  $f(x, y) = x^4 + y^4$ .
- (b)  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ .
- (c)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ .
- (d)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

**3.13.-** Re-escriviu la definició de funció homogènia per al cas de  $n$  variables i enuncieu el Teorema d'Euler per aquest cas. Fent servir això, demostreu que si la funció  $u$  satisfà:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = a \quad \text{per tot } a \in \mathbb{R},$$

llavors la funció  $v(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_n) - a \ln(x_1 + \dots + x_n)$  és homogènia de grau 0.

## 4 Llista de problemes 4

**4.1.-** Sigui  $y(u, v) = uv$  on  $u = \sin x$  i  $v = \cos x$ . Calculeu  $\frac{dy}{dx}$ .

**4.2.-** Considereu  $u = xe^y$ ,  $v = ze^t$  i  $h = \sin(uv)$ . Calculeu  $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z, t)$  usant la regla de la cadena.

**4.3.-** Sigui  $z = f(t, y)$  i  $y = g(t)$ . Obtingueu  $\frac{dz}{dt}$  en general. Feu servir aquesta expressió quan  $f(t, y) = t^2 + ye^y$  i  $g(t) = t^2$ .

**4.4.-** Sigui  $z = f(x^2y)$ . Proveu que  $x \frac{\partial z}{\partial x} = 2y \frac{\partial z}{\partial y}$ .

**4.5.-** Sigui  $z = f(x + y) - f(x - y)$ . Calculeu  $\frac{\partial z}{\partial x}$  i  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**4.6.-** Sigui

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudieu si  $f$  és localment invertible en un entorn de  $x = 0$ .

**4.7.-** Sigui  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida com  $f(x, y, z) = (e^x, \sin(x + y), e^z)$ . Proveu que  $f$  és invertible en un entorn de  $(0, 0, 0)$ . Proveu que hi ha punts on no es compleixen les hipòtesis del teorema de la funció inversa.

**4.8.-** Es considera la funció  $f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$ . Proveu que  $f$  és localment invertible en un entorn de qualsevol punt del pla. En aquest cas, mostreu que la funció  $f$  és invertible globalment, calculant la seva funció inversa. Quin és el domini màxim de definició de  $f^{-1}$ ? Comproveu que, en efecte, les matrius jacobianes de  $f$  i  $f^{-1}$  en un punt qualsevol són inverses l'una de l'altra.

**4.9.-** Sigui  $f(x) = Ax$  on  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $A$  és una matriu quadrada  $n \times n$  (si  $f$  està definida així, diem que és una funció lineal). Quina condició cal imposar sobre  $A$  per poder assegurar que  $f$  admet funció inversa global ?

**4.10.-** Donada la relació  $x^2y + y^2z + z^2x - 3 = 0$ , determineu l'existència de  $y = \phi(x, z)$  en un entorn de  $(1, 1, 1)$ . Calculeu, si és possible,  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ .

**4.11.-** Donada l'equació  $3x^2yz - y \ln x - 3 = 0$ , estudieu l'existència de la funcions implícites  $x = x(y, z)$ ,  $y = y(x, z)$  i  $z = z(x, y)$  en algun entorn del punt  $(1, 1, 1)$ . Calculeu, si és possible,  $\frac{\partial x}{\partial z}$  i  $\frac{\partial y}{\partial x}$ .

**4.12.-** Considereu l'equació  $x \tan y - az \ln x + b = 0$ . Per a quins valors de  $a$  i  $b$  es pot assegurar l'existència de  $x$  com a funció implícita de  $y$  i  $z$  en un entorn del punt  $(1, \pi/4, 3)$ ?

**4.13.-** Per a la definició implícita de  $y$  donada per  $x^2 + e^{xy-1} - \ln x = 1$ , calculeu la recta tangent de  $y$  en el punt  $(x, y) = (1, 0)$ .

**4.14.-** Per a quins punts l'equació  $xz + e^{xz} - \ln(x + y) + zy^2 = 0$  permet descriure  $x$  en funció de  $y$  i  $z$ ? Responen a la mateixa pregunta però considerant la definició implícita de  $y$  ó  $z$ .

**4.15.-** Trobeu alguns punts pels quals l'equació  $x^z + (p - 1)z^2 = 0$  permet expressar  $y$  en funció de  $z$  i  $p$ . Justifiqueu la vostra resposta.

**4.16.-** Siguin  $q_D = D(p)$  i  $q_S = S(p, t)$  les funcions de demanda i d'oferta, respectivament, d'un producte on  $p$  és el seu preu en el mercat i  $t$  són els impostos que l'afecten.

(a) Justifiqueu econòmicament que és lògic prendre  $D'(p) < 0$  i  $\frac{\partial S}{\partial p}(p, t) > 0$ .

(b) L'equació que dóna l'equilibri de mercat és, òbviament,  $D(p) - S(p, t) = 0$ . Quin és l'efecte sobre el preu si hi ha un augment dels impostos?

**4.17.-** Sigui  $x$  la variació del tipus d'interès en valors públics, i sigui  $y$  el volum de diners en fons d'inversió. Suposem que l'equació d'equilibri entre ambdues variables ve donada per  $x^2 + 2y^2 - 3xy = 0$ . Demostreu que per aquest model un augment en l'interès dels valors públics beneficia l'inversió en fons.

**4.18.-** Una empresa produeix un bé utilitzant dos factors. La relació entre la quantitat del bé  $q$  i les quantitats de factors utilitzades  $x, y$  és de la forma:

$$\ln q - \frac{x^2 y}{q} + 1 = 0, \quad x, y, q > 0.$$

Sabem que si  $x = y = 1$ , el nivell de producció és  $q = 1$ . Definiu la relació anterior, la producció de l'empresa en funció de la quantitat de factors al voltant d'aquests nivells. Calculeu, si és possible, les productivitats marginals dels factors  $x$  i  $y$ .

**4.19.-** Una empresa considera la funció de demanda del bé que produeix, que depèn de la quantitat produïda,  $q$ , del preu del bé,  $p$ , i de la renda disponible del individu,  $r$ :

$$d(p, p, r) = \ln \left( \frac{10q}{p} \right) \frac{1}{100} r.$$

En aquest moment, els valors de les variables són:  $q = 10$ ,  $p = 2$ ,  $r = 200$ . Un estudi del mercat indica una disminució de la renda disponible dels individus. Si el que volem és deixar constant la producció, com ha de variar el preu del bé en funció de la renda per a mantenir el nivell de demanda?

**4.20.-** La demanda d'un producte  $A$  és funció implícita dels preus dels productes  $A$  i  $B$ , definida per:

$$Q_{dA}^{1.5} P_A^{0.8} P_B^{0.3} = 50.$$

Per a quins preus és cert l'anterior? Calculeu la demanda marginal de  $A$  respecte als preus de  $A$  i  $B$ .

**4.21.-** Considereu el sistema no lineal d'equacions

$$\begin{aligned} xz^3 + y^2u^3 &= 1 \\ 2xy^2 + u^2z &= 0. \end{aligned}$$

(a) Estudieu si el sistema ens permet escriure implícitament  $x$  i  $y$  com a funció de  $z$  i  $u$  al voltant del punt  $(x, y, z, u) = (0, 1, 0, 1)$  (és a dir, si existeixen funcions  $f_1$  i  $f_2$  tals que  $x = f_1(z, u)$  i  $y = f_2(z, u)$  al voltant d'aquest punt).

(b) Denotem per  $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funció implícita. Calculeu la matriu jacobiana de  $f$  en el punt  $(0, 1)$ .

(c) És invertible aquesta funció  $f$  al voltant del punt  $(0, 1)$ ?

**4.22.-** Una certa xarxa de gasolineres catalanes compra petroli a Algèria. Es denota per  $q$  la quantitat de gasolina produïda, per  $v$  el nivell de vendes en cada període, i per  $s$  el salari mitjà dels seus treballadors. Les despeses més significatives de l'empresa són la distribució de la gasolina ( $D_1$ ) i la compra del petroli ( $D_2$ ) donades per les equacions

$$D_1(q, v, s) = \ln(qv) + 100s \quad \text{i} \quad D_2(q, v, s) = \frac{10q - v}{20} + 300.$$

En certes coordenades adequades, la situació actual és  $q = v = 10$  i  $s = 2$ . Així les despeses són

$$D_1(10, 10, 2) = \ln(100) + 200 \quad \text{i} \quad D_2(10, 10, 2) = \frac{9}{2} + 300.$$

Per raons sindicals, l'empresa ha de fer una pujada en els salaris però no vol que això afecti en cap cas les despeses  $F_1$  i  $F_2$ . Això vol dir exactament que

$$\begin{aligned} D_1(q, v, s) - D_1(10, 10, 2) &= 0 \\ D_2(q, v, s) - D_2(10, 10, 2) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Demostreu que el model permet escriure  $q = q(s)$  i  $v = v(s)$ .

(b) Si finalment s'aprova un petit augment salarial (mantenint la despesa), qué passarà amb les variables  $q$  i  $v$ ?

## 5 Llista problemes 5

**5.1.-** Doneu els punts candidats a màxim o mínim de les següents funcions en tot el seu domini de definició.

(a)  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ .

(b)  $f(x, y) = xy + y^2 - 1$ .

(c)  $f(x, y) = xe^{x+y}$ .

(d)  $f(x, y) = \ln(1 + x^2y)$ .

(e)  $f(x, y, z) = xy + yz + xz + 10$ .

(f)  $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$ .

$$(g) f(x, y, z) = e^x + e^y + e^{z^2} - 2e^z - x - y.$$

$$(h) f(x, y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - x - y.$$

$$(i) f(x, y) = xy - \frac{1}{2}x - y.$$

$$(j) f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

**5.2.-** Ara considerarem el problema de la localització de (candidats a) màxim o mínim (és a dir, punts que satisfan les condicions de primer ordre) però en dominis prefixats. Per tant, no només haurem de comprovar que es compleixen les condicions de primer ordre, sinó també que el candidat està localitzat en el domini prefixat corresponent. Obtingueu, doncs, els candidats a màxim o mínim en els dominis que es proposen.

$$(a) f(x, y) = x^2 - y^2 \text{ en el domini } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}.$$

$$(b) f(x, y) = \sin x + \cos y \text{ en el domini } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 2\pi \text{ i } y \leq 2\pi\}.$$

$$(c) f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2) \text{ en el domini } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 - 1/2 \leq 0\}.$$

**5.3.-** Justifiqueu que  $(0, 0)$  és un mínim local i absolut de la funció  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en el domini  $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ .

**5.4.-** Estudieu el signe de les següents matrius simètriques.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**5.5.-** Estudieu el signe de les següents matrius simètriques segons els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -a & -2a \\ 1 & -2a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2 \end{pmatrix}.$$

**5.6.-** Sigui  $A$  una matriu  $n \times n$ . Anomenem equació característica associada a la matriu  $A$  l'equació polinòmica  $P(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = 0$  on  $\text{Id}$  és la matriu identitat  $n \times n$ . Les arrels de l'equació característica les anomenem *valors propis* de la matriu. Es pot provar que una matriu simètrica té tots els valors propis reals. A més, també es pot provar que

la matriu és definida positiva (respectivament negativa) si i només si tots els valors propis són positius (respectivament negatius). Feu servir aquest criteri per decidir el signe de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2a & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**5.7.-** A l'exercici 5.1 d'aquesta llista, heu trobat els candidats a màxim i mínim per diferents funcions. Usant les condicions de segon ordre que fan referència a la matriu Hessiana, classifiqueu els punts candidats en màxims, mínims o punts de sella segons correspongui.

**5.8.-** Feu el mateix que en el problema anterior per a les següents funcions.

(a)  $f(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 3x - 4y.$

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{100}x^2 - 10x + \frac{1}{300}y^3 - 9y + 20600.$

**5.9.-** Els polinomis de Taylor que vàrem estudiar en el primer semestre tenen una generalització “natural” per funcions diferenciables de vàries variables. Així, si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  és de classe  $C^2$ , podem escriure la següent igualtat:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + J_f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) \\ &+ (x - x_0, y - y_0)H_f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)^T + R_f(x, y). \end{aligned}$$

on el terme  $R_f(x, y)$  pot ser considerat petit si  $(x, y)$  és prou a prop de  $(x_0, y_0)$ .

(a) Considereu la funció  $f(x, y) = e^{x+y}$  i el punt  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Observeu que  $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  pot ser aproximat usant la fórmula anterior (és a dir, assumint que  $R_f(x, y) = 0$ ).

(b) Sigui  $f$  una funció de classe  $C^2$  i  $(x_0, y_0)$  un punt del seu domini tal que  $J_f(x_0, y_0)$  és idènticament nul i la matriu Hessiana  $H_f(x_0, y_0)$  és definida negativa. Proveu, fent ús del polinomi de Taylor, que  $f$  té un màxim local en el punt  $(x_0, y_0)$ . Observeu que el recíproc no ha de ser cert.

**5.10.-** Sigui  $f(x, y) = x^3 - x^2 + y^2 + x - 2y$ . Demostreu que la matriu  $H_f(\frac{1}{10}, 0)$  és definida negativa. Podeu assegurar que  $f$  té un màxim en aquest punt?

**5.11.-** Una empresa produeix dos béns  $A$  i  $B$  en quantitats  $x$  i  $y$ , respectivament. Si la funció de beneficis és  $B(x, y) = 2xy - 2x^2 - y^2 - 8x - 2y$ , calculeu les quantitats que ha de produir per obtenir el màxim benefici.

**5.12.-** Una empresa produeix tres béns de manera que els seus preus de mercat en competència perfecta són  $P_x = 16$ ,  $P_y = 12$  i  $P_z = 20$ . Si  $x$ ,  $y$  i  $z$  representen les quantitats produïdes dels tres béns, la funció de cost pot escriure's com  $C(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 25$ . Obtingueu els valors de les quantitats que maximitzen els beneficis de l'empresa.

**5.13.-** La funció de producció d'una empresa depèn del capital  $K$  i del nombre de treballadors  $L$ . Suposem que la seva expressió ve determinada per  $f(K, L) = \sqrt{\sqrt{K} + \sqrt{L}}$ . Suposem que el preu unitari del producte és  $p$ , el cost del capital és  $r$ , i la taxa de salaris és  $w$ , de manera que els seus beneficis són

$$B(K, L) = pf(K, L) - rK - wL \quad (K \geq 0, L \geq 0).$$

Suposant que la funció de beneficis té un màxim en el domini que correspon, doneu la seva expressió en funció dels paràmetres  $p, r, w$ . Quin és el valor exacte si fixem  $p = 32\sqrt{2}$  i  $r = w = 1$ ? Comproveu que realment és un màxim.

## 6 Llista problemes 6

*Nota: Alguns problemes de la llista es poden resoldre sense fer servir el mètode de Lagrange. En tot cas, i per tal de practicar-lo, és convenient que el feu servir.*

**6.1.-** Optimitzeu les següents funcions sota les restriccions que s'indiquen.

- (a)  $f(x, y) = xy$  sota la restricció  $x + y = 1$ .
- (b)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$  sota les restriccions  $x + y + z = 1$  i  $x - y - 5z = 0$ .
- (c)  $f(x, y) = x + y$  sota la restricció  $x^2 + y^2 = 1$ .
- (d)  $f(x, y) = x + y^2$  sota la restricció  $9x + 4y^2 = 36$ .
- (e)  $f(x, y) = e^x + e^y$  sota la restricció  $e^{x+y} = e$ .

**6.2.-** Considereu el problema d'optimitzar la funció  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sota la restricció  $(x - 1)^3 - y^2 = 0$ . Comproveu si el punt  $(1, 0)$  és una solució.

**6.3.-** Considereu el problema de maximitzar la funció  $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  sota la restricció  $x^2 + y^2 = 1$ . Busqueu la relació entre  $a$  i  $b$  per tal que les solucions del problema siguin  $(1, 0)$  i  $(-1, 0)$ .

**6.4.-** Considerem la funció d'utilitat d'un consumidor  $u(x, y) = 6xy + 2y - 4$ , on  $x$  i  $y$  són les quantitats adquirides de dos béns  $A$  i  $B$ , respectivament. Els preus dels béns són 4 i 2 unitats monetàries (u.m). La quantitat de diners que disposa el consumidor per comprar els béns és de 8 u.m.

(a) Quina serà l'elecció òptima del consumidor si el seu objectiu és maximitzar la utilitat gastant tota la seva renda monetària?

(b) Creieu que podria augmentar la seva utilitat si disposés de menys renda?

**6.5.-** Una empresa produeix un bé  $A$  usant dos factors  $F_1$  i  $F_2$ . La funció de producció és  $q(x, y) = xy$ , on  $x$  i  $y$  són, respectivament, les quantitats de  $F_1$  i  $F_2$  usades en el procés. La funció de costos generada és  $C(x, y) = 3x + 2y$ . Determineu els valors  $x$  i  $y$  que maximitzen la producció si l'empresa vol fixar el nivell de costos a 120 u.m.

**6.6.-** Un cert individu gasta mensualment 48.000 u.m entre menjar ( $x$ ), vestir ( $y$ ) i sortir de festa ( $z$ ); els costos mitjos són 400, 300 i 160 u.m respectivament. Determineu les quantitats òptimes de  $x$ ,  $y$  i  $z$  si la seva utilitat vé donada per la funció  $u(x, y, z) = 10xyz^2$ .

**6.7.-** La carretera que uneix Tarragona i Cambrils passa per les rodalies de Reus sense entrar en el nucli urbà. El batlle de Reus vol construir un enllaç entre l'esmentada carretera i la circumvallació que dona la volta a la ciutat. Els responsables de la carretera només ho permetrien en el cas que l'enllaç connecti amb la carretera en un punt fixat. L'estudi dels tècnics dona un dibuix sobre el pla que, en coordenades adequades, col·loca el punt fixat pels responsables de la carretera en el punt  $(-2, 2)$  i la circumvallació sobre l'equació  $x^2 + y^2 = 1$ . Si suposem que el cost de l'obra augmenta amb la longitud de l'enllaç, quin és el punt de la circumvallació més adequat per unir Reus i la carretera?

**6.8.-** Resoleu gràficament (és a dir, fent us de les corbes de nivell de la funció objectiu, la corba restricció i el fet que el gradient sempre "apunta" en la direcció de màxim creixement de la funció) els següents problemes d'optimització.

(a)  $f(x, y) = -x^2 - y^2$  sota la restricció  $x + y = -1$ .

(b)  $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}$  sota la restricció  $x + y = 1$ .

(c)  $f(x, y) = x^2y^2$  sota la restricció  $x^2 + y^2 = 4$ .

**6.9.-** Calculeu el triangle isòsceles de perímetre 1 que té àrea màxima. Calculeu també el triangle de perímetre 1 i àrea màxima.

**6.10.-** Amb una corda d'un metre de longitud volem construir un cercle i un quadrat de manera que la suma de les àrees sigui màxima. Per on tallaríeu la corda?

**6.11.-** Sigui  $p \in \mathbb{R}$ . Considerem el problema de minimitzar la funció  $f(x, y) = x + 2y$  subjecte a la restricció  $p(x^2 + y^2) + x^2y^2 - 4 = 0$ .

(a) Obtingueu la solució del problema quan  $p = 0$  ( $x \geq 0$  i  $y \geq 0$ ).

(b) Si  $p$  és ara arbitrari, proveu que si un punt  $(x_0, y_0)$  resol el problema llavors aquest punt satisfà les equacions

$$2px_0 - py_0 + 2x_0y_0^2 - x_0^2y_0 = 0 \quad \text{i} \quad px_0^2 + py_0^2 + x_0^2y_0^2 = 4.$$

(c) Comproveu que el punt  $(x, y, p) = (2, 1, 0)$  és una solució dels sistema anterior. Utilitzeu el Teorema de la Funció Implícita per demostrar que en un entorn del punt es pot escriure  $x$  i  $y$  en funció de  $p$ .

(d) Calculeu  $x'(p)$  i  $y'(p)$  en  $p = 0$ .

**6.12.-** Considerem la funció  $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{3} \ln y$ .

(a) Quin és el seu domini natural de definició?

(b) Quins són els candidats a màxim i mínim local de  $f$  sota la restricció  $x + 2y = 1$ ? Classifiquen-los.

(c) Què es pot dir dels màxims i mínims globals de  $f$  sota la restricció?