Matemàtiques per a Economistes II: Repàs de matrius

Jordi Massó. Curs 2007-2008

1 Matrius

Sigui

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m,1} & ... & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

una *matriu* $m \times n$. Donat $j = 1, ..., m$ i $i = i, ..., n$, sigui $a_{j,i}$ un element genèric d'A. Sovint escrivim $A_{m\times n} = (a_{j,i})_{\substack{j=1,...,m \\ i=1,...,n}}$.

Diem que A és *quadrada* si $m = n$. Diem que una matriu quadrada és *simètrica* si, per a tot $j = 1, ..., m$ i per a tot $i = 1, ..., n$, es compleix $a_{j,i} = a_{i,j}$. Donada una matriu quadrada A, denotem per $\det A$ el determinant d'A. Diem que la matriu quadrada A és *no singular* si $\det A \neq 0$. La matriu simètrica $I_{n\times n} = (a_{j,i})_{\substack{j=1,...,n \\ i=1,...,n}}$ és la matriu *identitat* si

$$a_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \text{ ; és a dir, } I = \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 \\ ... & 1 & ... \\ 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Donada la matriu quadrada $A = (a_{j,i})_{\substack{j=1,...,n \\ i=1,...,n}}$, diem que la matriu A' es la *trasposta* d'A si $A' = (a_{i,j})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,m}}$; és a dir,

$$\text{si } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m,1} & ... & a_{m,n} \end{bmatrix}, \text{ aleshores } A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{m,1} \\ ... & ... & ... \\ a_{1,n} & ... & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

2 Inversa d'una matriu quadrada

Sigui A una matriu quadrada no singular. Diem que A^{-1} és la matriu *inversa* d'A si

$$A \cdot A^{-1} = I.$$

Donada $A_{n\times n}$, definim, per a tot $j = 1, ..., n$ i tot $i = 1, ..., n$, la submatriu $C_{j,i}$ de dimensió $(n-1) \times (n-1)$ com

$$C_{j,i} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j-1,1} & ... & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & ... & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & ... & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & ... & a_{j+1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Sigui $c_{j,i} = (-1)^{j+i} \cdot \det C_{j,i}$. Definim la matriu $C = (c_{j,i})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,n}}$. Donada A, la matriu *adjunta* d'A, $adj A$, és la trasposta de la matriu C; és a dir, $adj A = C'$.

Teorema Sigui A una matriu quadrada no singular. Aleshores,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj A.$$

Exemple Trobar la inversa de la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Primer, A és no singular ja que $\det A = 24 + 32 + 3 - 12 - 4 - 48 = 59 - 64 = -5 \neq 0$. Per obtenir $adj A$, calculem $c_{j,i}$ per a tot $j = 1, 2, 3$ i tot $i = 1, 2, 3$:

$$c_{1,1} = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 10 \qquad c_{1,2} = -\det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = -15 \qquad c_{1,3} = \det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 5$$

$$c_{2,1} = -\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -4 \qquad c_{2,2} = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 4 \qquad c_{2,3} = -\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -1$$

$$c_{3,1} = \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -9 \qquad c_{3,2} = -\det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = 14 \qquad c_{3,3} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -6.$$

Per tant,

$$C = \begin{bmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -4 & 4 & -1 \\ -9 & 14 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad adj A = C' = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ 5 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Finalment,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj A = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ 5 & -1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 3 & -\frac{4}{5} & -\frac{14}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

Comprobació de que $A \cdot A^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 3 & -\frac{4}{5} & -\frac{14}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -4 + 9 - 4 = 1.$
$2 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot (-\frac{4}{5}) + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5} - \frac{12}{5} + \frac{4}{5} = 0.$

$2 \cdot \frac{9}{5} + 3 \cdot (-\frac{14}{5}) + 4 \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{5} - \frac{42}{5} + \frac{24}{5} = 0.$
$4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = -8 + 9 - 1 = 0.$
$4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot (-\frac{4}{5}) + 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{5} - \frac{12}{5} + \frac{1}{5} = 1.$
$4 \cdot \frac{9}{5} + 3 \cdot (-\frac{14}{5}) + 1 \cdot \frac{6}{5} = \frac{36}{5} - \frac{42}{5} + \frac{6}{5} = 0.$
$1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -2 + 6 - 4 = 0.$
$1 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot (-\frac{4}{5}) + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} - \frac{8}{5} + \frac{4}{5} = 0.$
$1 \cdot \frac{9}{5} + 2 \cdot (-\frac{14}{5}) + 4 \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5} - \frac{28}{5} + \frac{24}{5} = 1.$

3 Matrius definides i semidefinides

3.1 Formes quadràtiques

Sigui A una matriu simètrica $n \times n$.

La *forma quadràtica* (associada a A) $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és la funció definida per: donat $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
Q(x) &= x \cdot A \cdot x' \\
&= (x_1, ..., x_n) \cdot \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,1}, ..., \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,n} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,j} x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j.
\end{aligned}$$

Exemple La forma quadràtica associada a $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ és la funció $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on, per a tot $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 + x_2 x_1 + x_1 x_2 + 3x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2.$$

Definicions Sigui A una matriu simètrica $n \times n$. Diem que

A és *definida positiva* si $Q(x) > 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

A és *definida negativa* si $Q(x) < 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

A és *semidefinida positiva* si $Q(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$.

A és *semidefinida negativa* si $Q(x) \leq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$.

3.2 Menors

Definició Sigui A una matriu simètrica $n \times n$. Els n *menors principals* d'A, denotats per $A_1, ..., A_n$, són les submatrius quadrades definides com segueix: per $k = 1, ..., n$

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k,1} & a_{k,2} & ... & a_{k,k} \end{bmatrix}.$$

Definició Sigui A una matriu quadrada $n \times n$. Un *menor* B_k d'ordre $k = 1, ..., n$, és una de les submatrius d'A formada al considerar les mateixes k files i columnes (hi ha $2^n - 1$ menors).

Exemple Considerem la matriu 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

La matriu A té els següents $2^4 - 1 = 15$ menors.

- D'ordre $k = 1 : B_1^1 = (1)$, $B_1^2 = (6)$, $B_1^3 = (11)$ i $B_1^4 = (16)$.
- Dordre $k = 2 : B_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$, $B_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$, $B_2^4 = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$, $B_2^5 = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$, $B_2^6 = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$.
- D'ordre $k = 3 : B_3^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$, $B_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 13 & 14 & 16 \end{bmatrix}$, $B_3^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$, $B_3^4 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$.
- D'ordre $k = 4 : B_4^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$.

Teorema Sigui A una matriu simètrica $n \times n$. Aleshores,

(1) A és definida positiva si, i només si, $\det A_k > 0$ per a tot $k = 1, ..., n$.

(2) A és definida negativa si, i només si, $(-1)^k \det A_k > 0$ per a tot $k = 1, ..., n$.

(3) A és semidefinida positiva si, i només si, $\det B_k \geq 0$ per a tot $k = 1, ..., n$ i per a tot menor B_k d'ordre k.

(4) A és semidefinida negativa si, i només si, per tot menor B_k d'ordre k, $signe(\det B_k) \geq 0$ si k és parell i $signe(\det B_k) \leq 0$ si k és senar.

3.3 Valors propis

Definició Sigui A una matriu quadrada $n \times n$. Els *valors propis* $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ d'A són les arrels del següent polinomi:

$$p(\lambda) = \det [A - \lambda \cdot I] = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

El polinomi $p(\lambda)$ és conegut com el *polinomi característic* d'A. Si A és simètrica, aleshores, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ per a tot $k = 1, ..., n$.

Teorema Sigui A una matriu simètrica $n \times n$ i siguin $\lambda_1, ..., \lambda_n$ els seus valors propis (reals). Aleshores,

(1) A és definida positiva si, i només si, $\lambda_k > 0$ per a tot $k = 1, ..., n$.

(2) A és definida negativa si, i només si, $\lambda_k < 0$ per a tot $k = 1, ..., n$.

(3) A és semidefinida positiva si, i només si, $\lambda_k \geq 0$ per a tot $k = 1, ..., n$.

(4) A és semidefinida negativa si, i només si, $\lambda_k \leq 0$ per a tot $k = 1, ..., n$.

3.4 Exemple 1

Sigui $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Forma quadràtica: Sigui $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Aleshores,

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_2, -x_1 + 3x_2 + x_3, x_2 + x_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 - x_2x_1 - x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3x_2 + x_2x_3 + x_3^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 \\ &\geq 0 \text{ per a tot } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

$Q(x_1, x_2, x_3) = 0$ només si $x_1 = x_2$, $x_2 = 0$ i $x_2 = -x_3$; és a dir, si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Per tant, per a tot $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$, $Q(x_1, x_2, x_3) > 0$. La matriu A és definida positiva.

Menors principals:

- $\det A_1 = \det [1] = 1 > 0$.

- $\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0.$

- $\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = 1 > 0.$

Per tant, A és definida positiva.

Valors propis: El polinomi característic d'A és:

$$p(\lambda) = \det[A - \lambda \cdot I] = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Equivalentment, $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 2] = 0$.

Una primera arrel del polinomi és $\lambda_1 = 1 > 0$. Per tant, $(1-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$. Les altres dues arrels les trobem a partir de, $\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{12}}{2}$. És a dir, $\lambda_2 = 2 + \frac{|\sqrt{12}|}{2} > 0$ i $\lambda_3 = 2 - \frac{|\sqrt{12}|}{2}$. Observem que $\lambda_3 > 0$ ja que $2 > \frac{|\sqrt{12}|}{2}$ degut a que $4 > \left|\sqrt{12}\right|$. Per tant, A és definida positiva ja que $\lambda_k > 0$ per a tot $k = 1, 2, 3$.

3.5 Exemple 2

Sigui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Forma quadràtica: Sigui $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Aleshores,

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) \quad &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 + x_3, x_2, x_1 + x_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + x_3 x_1 + x_2^2 + x_1 x_3 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_3 \\ &= 2x_2^2 + (x_1 + x_3)^2 \\ &\geq 0 \text{ per a tot } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

$Q(x_1, x_2, x_3) = 0$ si $x_1 = -x_3$ i $x_2 = 0$. Per exemple, $(1, 0, -1) \neq (0, 0, 0)$ i $Q(1, 0, -1) = 0$. Per tant, la matriu A no és definida positiva sino que és semidefinida positiva.

Menors: $2^3 - 1 = 7$.

- D'ordre $k = 1$: $\det B_1^1 = \det[1] = 1 > 0$, $\det B_1^2 = \det[2] = 2 > 0$ i $\det B_1^3 = \det[1] = 1 > 0$.

- Dordre $k = 2$: $\det B_2^1 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 > 0$, $\det B_2^2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \geq 0$ i $\det B_2^3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 > 0$.

- D'ordre $k = 3$: $\det B_3^1 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 2 = 0 \geq 0$.

Per tant, A és semidefinida positiva ja que el determinant de tots els seus menors és no negatiu (no és definida positiva ja que algun dels seus menors té el determinant igual a 0).

Valors propis: El polinomi característic d'A és:

$$p(\lambda) = \det [A - \lambda \cdot I] = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Equivalentment, $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = 0$.

Una primera arrel del polinomi és $\lambda_1 = 2 > 0$. Per tant, $(1-\lambda)^2 - 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$. És a dir, $\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0$. Per tant, una altra arrel del polinomi és $\lambda_2 = 0$. Finalment, $\lambda_3 = 2$ (les arrels poden ser dobles). Per tant, A no és definida positiva ja que $\lambda_2 = 0$, pero és semidefinida positiva ja que $\lambda_k \geq 0$ per a tot $k = 1, 2, 3$.

4 Rang

Definició Sigui A una matriu $m \times n$. El rang d'A, $rangA$, és el màxim nombre de vectors columna (o fila) linealment independents.

Teorema Sigui A una matriu $m \times n$. Aleshores, $rangA = k$ si, i només si, k és l'ordre màxim d'un menor d'A no singular. És a dir, existeix un menor B_k tal que $\det B_k \neq 0$ i, o bé no existeix cap menor d'ordre $k' > k$, o bé tots els menors d'ordre $k' > k$ tenen la propietat de que $\det B_{k'} = 0$.

Exemple 1 Sigui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. Aleshores, $rangA = 2$ ja que $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 8 = -4 \neq 0$.

Exemple 2 Sigui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Observem que la tercera columna és dues vegades la primera. Per tant, el nombre màxim de vectors columna linealment independents és 2. De fet, $\det A = 24 + 0 + 48 - 24 - 0 - 48 = 0$. Però, com que $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 8 = -4 \neq 0$, $rangA = 2$.