Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2006-2007. Proba I: J. Massó. 13-IV-2007.

Nom: SOLUCIÓ	Grup: 4

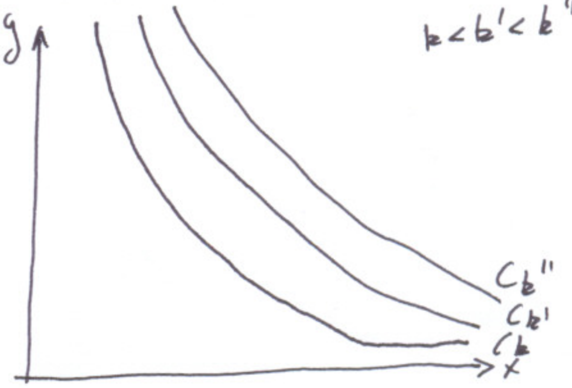
1. (3 punts) Dibuixar el mapa de corbes de nivell de la funció $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ a on per tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(x, y) = x^2 \cdot y$. Argumentar que f és continua.

$k \neq 0 \quad C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x^2 \cdot y = k\}$

$x \neq 0 \quad y = k/x^2 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^2} = 0, \ \lim_{x \to 0} \frac{k}{x^2} = \infty$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2kx}{x^4} = -\frac{2x^2yx}{x^4} = \frac{-2y}{x} < 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6kx^2}{x^6} = \frac{6k}{x^4} > 0$, és convexa.



f és contínua ja que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+$

$f(x,y) = \pi_1(x,y) \cdot \pi_1(x,y) \cdot \pi_2(x,y)$; és a dir, és el producte de primeres i segones components, que són contínues.

2. (3 punts) Argumentar que el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x + 2 \cdot y \leq 900\}$ és compacte. Demostrar, fent servir la definició, que A és convex.

$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x = 0, 0 \leq y \leq 450\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid y = 0, 0 \leq x \leq 900\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x + 2y = 900\} \subset A$. Per tant, A és tancat.

A és fitat perquè $A \subset B((0,0), 1000)$. Per tant, A és un conjunt compacte

Siguin $(x_1,y_1) \in A$ (és a dir, $x_1 + 2y_1 \leq 900 \ (1)$) i $(x_2,y_2) \in A$ (és a dir, $x_2 + 2y_2 \leq 900 \ (2)$).

Volem demostrar que $\forall t \in [0,1]$, $t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2) \in A$; és a dir,

$(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in A \Leftrightarrow tx_1 + (1-t)x_2 + 2[ty_1 + (1-t)y_2] \leq 900$

$\Updownarrow$

$t(x_1 + 2y_1) + (1-t)(x_2 + 2y_2) \overset{?}{\leq} 900$

~~Per (1) i (2)~~,

Per (1) i (2),

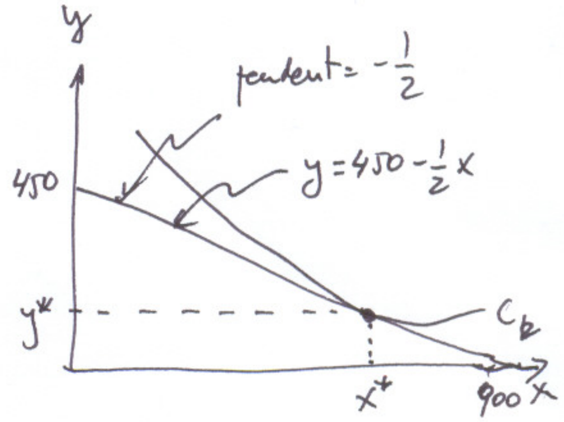
$t(x_1 + 2y_1) + (1-t)(x_2 + 2y_2) \leq t\,900 + (1-t)\,900 = 900$. Per tant,

$t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2) \in A$. És a dir, A és convex.

3. (4 punts) Argumentar que el següent problema té solució: Triar $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ amb l'objecte de

$$\max \quad x^2 \cdot y$$
$$\text{subjecte a} \quad x + 2 \cdot y \leq 900.$$

La funció $f(x,y) = x^2 \cdot y$ és contínua en $\mathbb{R}^2_+$ i el conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x + 2y \leq 900\}$ és compacte. Per tant, pel Teorema de Weierstrass, f té un màxim (x^*,y^*) en el conjunt A. El vector (x^*,y^*) és solució del problema.



Trobar la solució i representar-la geomètricament.

La solució $(x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2_+$ té la propietat geomètrica de que el pendent de la corba de nivell al punt (x^*,y^*) és tangent a la restricció amb igualtat

Pendent de la restricció: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{Restricció}} = -\frac{1}{2}$

Pendent de la corba de nivell (trobada en el apartat (1)): $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{C_k} = \frac{-2y}{x}$.

Per tant, (x^*,y^*) és la solució al sistema
(a) $-\frac{2y}{x} = -\frac{1}{2}$
(b) $x + 2y = 900$

d'(a): $x = 4y$; substituint en (b),
$4y + 2y = 900$
$6y = 900$
$y^* = 150$.
Com que $x = 4y$, $x^* = 600$
solució: $(x^*,y^*) = (600,150)$