Universitat Autònoma de Barcelona

Departament d'Economia i d'Història Econòmica

Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2006-2007. Proba I: J. Massó. 13-IV-2007.

Nom: SOLUCIÓ	Grup: 01

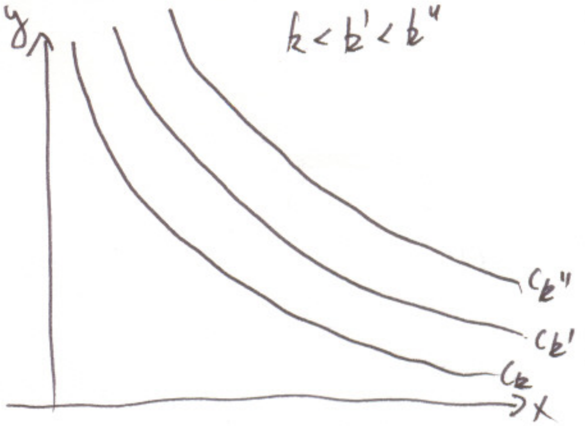
1. (3 punts) Dibuixar el mapa de corbes de nivell de la funció $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ a on per tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(x,y) = x \cdot y^{1/2}$. Argumentar que f és continua.

$k \neq 0$, $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x \cdot y^{1/2} = k\}$

$x \neq 0$, $y = \frac{k^2}{x^2}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{k^2}{x^2} = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{k^2}{x^2} = \infty$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xk^2}{x^4} = \frac{-2k^2}{x^3} = \frac{-2x^2y}{x^3} = \frac{-2y}{x} < 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6k^2x^2}{x^6} = \frac{6k^2}{x^4} > 0$. La corba de nivell és convexa



f és contínua ja que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(x,y) = \pi_1(x,y) \cdot \sqrt{\pi_2(x,y)}$; és a dir, és el producte de la primera component i la arrel quadrada de la segona component, que són contínues

2. (3 punts) Argumentar que el conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 2 \cdot x + y \leq 900\}$ és compacte. Demostrar, fent servir la definició, que A és convex.

$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \leq y \leq 900\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid y = 0, 0 \leq x \leq 450\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 900\} \subset A$. Per tant, A és tancat.

A és fitat ja que $A \subset B((0,0), 1000)$. Per tant, A és compacte.

Siguin $(x_1,y_1) \in A$ (és a dir, (1) $2x_1 + y_1 \leq 900$) i $(x_2,y_2) \in A$ (és a dir, (2) $2x_2 + y_2 \leq 900$).

volem demostrar que $\forall t \in [0,1]$, $t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2) \in A$; és a dir, que

$2(tx_1 + (1-t)x_2) + ty_1 + (1-t)y_2 = t(2x_1 + y_1) + (1-t)(2x_2 + y_2) \leq 900$.

Per (1) i (2),

$t(2x_1 + y_1) + (1-t)(2x_2 + y_2) \leq t900 + (1-t)900 = 900$. Per tant,

$t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2) \in A$. És a dir, A és convex.

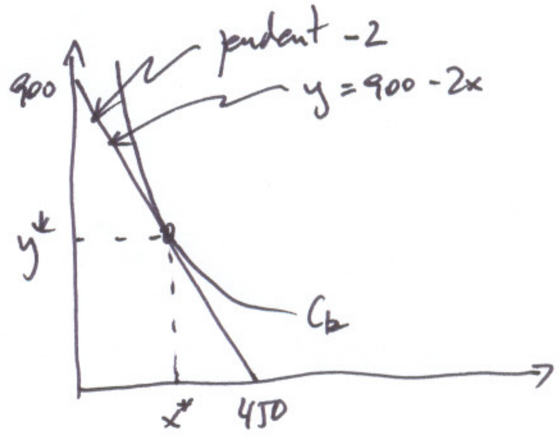
Edifici B - Campus de la UAB - 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès) - Barcelona. Spain
Tel.: 34 - 93 581 12 00 - Fax: 34 - 93 581 20 12
d.econ.h.economica@uab.es
www.uab.es

3. (4 punts) Argumentar que el següent problema té solució: Triar $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ amb l'objecte de

$$\begin{array}{ll} \max & x \cdot y^{1/2} \\ \text{subjecte a} & 2 \cdot x + y \leq 900. \end{array}$$

La funció $f(x,y) = x \cdot y^{1/2}$ és contínua en $\mathbb{R}^2_+$ i el conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y \leq 900\}$ és compacte. Per tant, pel Teorema de Weierstrass, f té un màxim (x^*, y^*) en el conjunt A. El vector (x^*, y^*) és una solució del problema.

Trobar la solució i representar-la geomètricament.



La solució $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2_+$ té la propietat geomètrica de que el pendent de la corba de nivell al punt (x^*, y^*) és tangent a la restricció amb igualtat.

Pendent de la restricció: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\text{restricció}} = -2$

Pendent de la corba de nivell (trobada en la pregunta 1): $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{C_k} = -\dfrac{2y}{x}$

Per tant, (x^*, y^*) és la solució al sistema: (a) $-\dfrac{2y}{x} = -2$

(b) $2x + y = 900.$

Per (a), $x = y$; substituint en (b),

$2x + x = 900$

$3x = 900$

$x^* = 300$

$y^* = 300.$

Solució: $(x^*, y^*) = (300, 300)$