Exemple (Teorema de la Funció Implícita)

Matemàtiques per a Economistes II. Curs 2007-2008

Jordi Massó. Grups 01 i 04

Considerem el sistema d'equacions

$$\begin{aligned} xu + yv^2 &= 0 \\ xv^3 + y^2u^6 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Preguntes: Es pot resoldre (u, v) en funció de (x, y) al voltant del punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, -1, -1)$? Com varien u i v, al variar x i y, en el punt $(1, 1, -1, -1)$?

Respostes: Si. Sigui $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $F_1(x, y, u, v) = xu + yv^2$ i $F_2(x, y, u, v) = xv^3 + y^2u^6$. Observem que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ i que els vectors (x, y, u, v) que resolen (1) són aquells que compleixen $F(x, y, u, v) = (0, 0)$. En particular, $F(1, 1, -1 -1) = 0$ ja que $1(-1) + 1(-1)^2 = 0$ i $1(-1)^3 + 1^2(-1)^6 = 0$. Comprovem que es satisfà l'altra hipòtesi del Teorema de la Funció Implícita: $\det J_{F_{(u,v)}}(1, 1, -1, -1) \neq 0$.

$$\begin{aligned} J_{F_{(u,v)}}(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x, y, u, v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x, y, u, v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x, y, u, v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x, y, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{pmatrix}. \\ J_{F_{(u,v)}}(1, 1, -1, -1) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Efectivament, $\det J_{F_{(u,v)}}(1, 1, -1, -1) = 3 - 12 = -9 \neq 0$.

Per tant, el Teorema de la Funció Implícita ens assegura l'existència de dos conjunts oberts $U \subset \mathbb{R}^2$ i $W \subset \mathbb{R}^2$ tals que $(x_0, y_0) = (1, 1) \in U$, $(u_0, v_0) = (-1, -1) \in W$, i existeix una funció (implícita) $f : U \longrightarrow W$, $f \in C^\infty(U)$, tal que per tot $(x, y) \in U$, $F(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) = (0, 0)$ i

$$J_f(x, y) = -J_{F_{(u,v)}}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))^{-1} \cdot J_{F_{(x,y)}}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

En particular,

$$J_f(1,1) = -J_{F_{(u,v)}}(1,1,-1,-1)^{-1} \cdot J_{F_{(x,y)}}(1,1,-1,-1). \tag{2}$$

Per saber com varien u i v, al variar x i y, en el punt $(1,1,-1,-1)$ hem de trobar $J_f(1,1)$. Primer,

$$J_{F_{(u,v)}}(1,1,-1,-1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det J_{F_{(u,v)}}(1,1,-1,-1)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Segon,

$$J_{F_{(x,y)}}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v^2 \\ v^3 & 2yu^6 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$J_{F_{(x,y)}}(1,1,-1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Substituint a (2),

$$\begin{aligned} J_f(1,1) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \frac{2}{9} & \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} - \frac{1}{1} & \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$