Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2008-2009. Proba III: J. Massó. 29-V-2009

Cognoms: SOLUCIONS Nom:

Considerem les funcions $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ tals que per tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x + y^2 \\ g(x,y) &= \frac{1}{2}x + y - 5. \end{aligned}$$

Trobar els extrems locals restringits de f a $g^{-1}(0)$.

Comprovem que les condicions del Teorema 1 de Lagrange (C.P.O.) es satisfan: $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2_{++})$ i $rang J_g(x,y) = rang(\frac{1}{2}, 1) = 1$. Suposem que (x_0, y_0) és un extrem local restringit de f a $g^{-1}(0)$ i que $x_0 > 0$ i $y_0 > 0$ (és a dir, $(x_0, y_0) \in Int(\mathbb{R}^2_{++})$). Definim el Lagrangià $L(x,y,\lambda) = x + y^2 - \lambda[\frac{1}{2}x + y - 5]$. Aleshores,

(1) $\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 1 - \frac{1}{2}\lambda = 0.$

(2) $\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2y - \lambda = 0.$

(3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\frac{1}{2}x - y + 5 = 0.$

Per (1), $\lambda = 2$. Per (2), $y = 1$. Per (3), $\frac{1}{2}x + y = 5$. Per tant, $x_0 = 8$, $y_0 = 1$ i $\lambda_0 = 2$. Efectivament, $(x_0, y_0) \in Int(\mathbb{R}^2_{++})$. Per tant, el únic punt crític del Lagrangià candidat a ser extrem local restringit de f a $g^{-1}(0)$ és $(x_0, y_0, \lambda_0) = (8, 1, 2)$.

Per determinar si $(8,1,2)$ és màxim o minim local restringit de f a $g^{-1}(0)$, observem que $r = 2$ ja que $n = 2$ i $m = 1$. Busquem el signe de

$$\Delta_2(x_0,y_0,\lambda_0) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0,y_0,\lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0,y_0,\lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0,y_0,\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

És a dir,

$\Delta_2(x,y,\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Per tant, $\Delta_2(8,1,2) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$

Com que $(-1) \cdot \Delta_2(8,1,2) = (-1) \cdot (-\frac{1}{2}) = 1 > 0$, $(x_0, y_0) = (8,1)$ és un mínim local restringit de f a $g^{-1}(0)$.