Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2007-2008

Sessió II: J. Massó

Considerem les següents famílies de funcions $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$.

1. Cobb-Douglas. $f(x, y) = A \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$, a on $A, \alpha, \beta > 0$.
2. Substitutius. $f(x, y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$, a on $\alpha, \beta > 0$.
3. Complementaris. $f(x, y) = \min\{\alpha \cdot x, \beta \cdot y\}$, a on $\alpha, \beta > 0$.
4. Quasi-lineals. $f(x, y) = \alpha \cdot x + y^\beta$, a on $\alpha, \beta > 0$.

Per a cada una de les famílies anteriors:

A. Calcular la $k \geq 1$ màxima que fa que $f \in C^k(\mathbb{R}^2_+)$ i determinar si f és diferenciable.

B. Trobar el gradient $\nabla f(x, y)$ i avaluar-lo en el punt $(1, 2)$.

C. Trobar el hessià $H_f(x, y)$ i comprovar el Teorema de Schwartz. Avaluar $H_f(x, y)$ en el punt $(1, 2)$.

D. Determinar la $k \geq 0$ tal que fa que f sigui homogènia de grau k. Comprovar el Teorema de Euler i comprovar que si f és homogènia de grau $k \geq 1$ i $f \in C^1(\mathbb{R}^2_+)$ aleshores, les funcions $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ i $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ són homogènies de grau $k - 1$.

E. Trobar la derivada de les funció implícita $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida per $f(x, h(x)) = k > 0$. Avaluar-la en un punt $x_0 \in \mathbb{R}_+$, considerant que $y_0 = h(x_0)$. Comprovar que el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ és perpendicular al pendent de la corba de nivell $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid f(x, y) = k\}$ en el punt (x_0, y_0).