Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2006-2007. Proba III: J. Massó. 1-VI-2007.

Cognom:	**Nom:**	**Grup:** 04

Considerem les funcions $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ tals que per tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \cdot y \\ g(x,y) &= x + 2 \cdot y - 60. \end{aligned}$$

Trobar els extrems locals restringits de f a $g^{-1}(0)$.

Comprovem que les condicions del Teorema 1 de Lagrange (C.P.O.) es satisfan: $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ i $rang J_g(x, y) = rang(1, 2) = 1$. Suposem que (x_0, y_0) és un extrem local restringit de f a $g^{-1}(0)$ i que $x_0 > 0$ i $y_0 > 0$ (és a dir, $(x_0, y_0) \in Int(\mathbb{R}^2_+)$). Definim el Lagrangià $L(x, y, \lambda) = x \cdot y - \lambda[x + 2 \cdot y - 60]$. Aleshores,

(1) $\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = y - \lambda = 0.$

(2) $\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = x - 2 \cdot \lambda = 0.$

(3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -x - 2 \cdot y + 60 = 0.$

Per (1), $y = \lambda$. Per (2), $x = 2 \cdot y$. Per (3), $x + 2 \cdot y = 2 \cdot y + 2 \cdot y = 60$. Per tant, $y_0 = 15$, $x_0 = 30$ i $\lambda_0 = 15$. Efectivament, $(x_0, y_0) \in Int(\mathbb{R}^2_+)$. Per tant, el vector $(x_0, y_0, \lambda_0) = (30, 15, 15)$ és l'únic punt critic del Lagrangià i l'unic possible extrem local restringit de f a $g^{-1}(0)$.

Per determinar si $(30, 15, 15)$ és màxim o minim local restringit de f a $g^{-1}(0)$, observem que $r = 2$ ja que $n = 2$ i $m = 1$. Busquem el signe de

$$\Delta_2(x_0, y_0, \lambda_0) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{pmatrix}.$$

És a dir,

$$\Delta_2(30, 15, 15) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4 > 0.$$

Com que $(-1) \cdot \Delta_2(30, 15, 15) = -4 < 0$ i $(-1)^2 \cdot \Delta_2(30, 15, 15) = 4 > 0$, $(x_0, y_0) = (30, 15)$ és un màxim local restringit de f a $g^{-1}(0)$.