Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2008-2009. Proba II: J. Massó. 8-V-2009

Solució	**Grup:** 01

Sigui $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ la funció de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ definida per $f(x,y) = x \cdot y$.

1. (2 punts) Trobar el gradient $\nabla f(x,y)$. Avaluar-lo en el punt $(2,3)$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\ &= (y,x). \\ \nabla f(2,3) &= (3,2). \end{aligned}$$

2. (2 punts) Trobar el hessià $H_f(x,y)$ i comprovar el Teorema de Schwartz. Avaluar-lo en el punt $(2,3)$.

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \\ H_f(2,3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teorema de Schwartz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

3. (2 punts) Fent servir la definició, determinar el grau de homegeneitat de f. Comprovar el Teorema de Euler.

Sigui $t > 0$. Per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$f(tx,ty) = (tx)(ty) = t^2 xy = t^2 f(x,y).$$

Per tant, f és homogènia de grau $k = 2$. Comprovem el Teorema de Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy + yx = 2xy = kf(x,y).$$

4. (4 punts) Sigui $h : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ la funció implícita tal que, per tot $x > 0$, $f(x, h(x)) = 6$. Considerar el punt $(2, 3)$.

4.1. Comprovar que es satisfan les hipòtesis del Teorema de la Funció Implícita.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2_+)$,
$(2, 3) \in Int(\mathbb{R}^2_+)$,
$f(2, 3) - 6 = 0$ i
$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 2 \neq 0$.

4.2. Trobar la derivada de la funció implícita h.

$h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{y}{x}$, a on $y = h(x)$.

4.3. Avaluar h' en el punt $(2, 3)$.

$h'(2) = -\frac{3}{2}$.

4.4. Comprovar que $\nabla f(2, 3)$ és perpendicular al pendent de la funció implícita h en el punt $(2, 3)$. Fer un dibuix.

Com que $h'(2) = -\frac{3}{2}$, $\nabla f(2, 3)$ és perpendicular al pendent de la funció h en el punt $(2, 3)$ si, i només si, els vectors $\nabla f(2, 3)$ i $(-2, 3)$ són perpendiculars; és a dir,

$$(-2, 3) \cdot \nabla f(2, 3) = 0.$$

Però,

$$\begin{aligned} (-2, 3) \cdot \nabla f(2, 3) &= (-2, 3) \cdot (3, 2) \\ &= -6 + 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Per tant, $\nabla f(2, 3)$ és perpendicular al pendent de la funció h en el punt $(2, 3)$.