Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2006-2007. Proba II: J. Massó. 18-V-2007.

Solució	**Grup:** 04

Sigui $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ la funció de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ definida per $f(x,y) = 2 \cdot x \cdot y^2$.

1. (2 punts) Trobar el gradient $\nabla f(x,y)$. Avaluar-lo en el punt $(1,2)$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\ &= \left(2y^2, 4xy\right). \\ \nabla f(1,2) &= (8,8). \end{aligned}$$

2. (2 punts) Trobar el hessià $H_f(x,y)$ i comprovar el Teorema de Schwartz. Avaluar-lo en el punt $(1,2)$.

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}. \\ H_f(1,2) &= \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teorema de Schwartz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

3. (2 punts) Fent servir la definició, determinar el grau de homegeneitat de f. Comprovar el Teorema de Euler.

Sigui $t > 0$. Per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$f(tx,ty) = 2(tx)(ty)^2 = t^3 2xy^2 = t^3 f(x,y).$$

Per tant, f és homogènia de grau $k = 3$. Comprovem el Teorema de Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x2y^2 + y4xy = 2xy^2 + 4xy^2 = 6xy^2 = kf(x,y).$$

4. (4 punts) Sigui $h : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ la funció implícita tal que, per tot $x > 0$, $f(x, h(x)) = 8$. Considerar el punt $(1, 2)$.

4.1. Comprovar que es satisfan les hipòtesis del Teorema de la Funció Implícita.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2_+)$,
$(1, 2) \in Int(\mathbb{R}^2_+)$,
$f(1, 2) - 8 = 0$ i
$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 8 \neq 0$.

4.2. Trobar la derivada de la funció implícita h.

$h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{2y^2}{4xy} = -\frac{y}{2x}$, a on $y = h(x)$.

4.3. Avaluar h' en el punt $(1, 2)$.

$h'(1) = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$.

4.4. Comprovar que $\nabla f(1, 2)$ és perpendicular al pendent de la funció implícita h en el punt $(1, 2)$. Fer un dibuix.

Com que $h'(1) = -1$, $\nabla f(1, 2)$ és perpendicular al pendent de la funció h en el punt $(1, 2)$ si, i només si, els vectors $\nabla f(1, 2)$ i $(-1, 1)$ són perpendiculars; és a dir,

$$(-1, 1) \cdot \nabla f(1, 2) = 0.$$

Però,

$$\begin{aligned} (-1, 1) \cdot \nabla f(1, 2) &= (-1, 1) \cdot (8, 8) \\ &= -8 + 8 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Per tant, $\nabla f(1, 2)$ és perpendicular al pendent de la funció h en el punt $(1, 2)$.