Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2006-2007. Proba II: J. Massó. 18-V-2007.

Solució	**Grup:** 01

Sigui $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ la funció de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ definida per $f(x, y) = 3 \cdot x^2 \cdot y$.

1. (2 punts) Trobar el gradient $\nabla f(x, y)$. Avaluar-lo en el punt $(2, 1)$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\ &= \left(6xy, 3x^2\right). \\ \nabla f(2,1) &= (12, 12). \end{aligned}$$

2. (2 punts) Trobar el hessià $H_f(x, y)$ i comprovar el Teorema de Schwartz. Avaluar-lo en el punt $(2, 1)$.

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 0 \end{pmatrix}. \\ H_f(2,1) &= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teorema de Schwartz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

3. (2 punts) Fent servir la definició, determinar el grau de homegeneitat de f. Comprovar el Teorema de Euler.

Sigui $t > 0$. Per a tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$f(tx, ty) = 3(tx)^2(ty) = t^3 3x^2 y = t^3 f(x, y).$$

Per tant, f és homogènia de grau $k = 3$. Comprovem el Teorema de Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x6xy + y3x^2 = 6x^2y + 3x^2y = 9x^2y = kf(x,y).$$

4. (4 punts) Sigui $h : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ la funció implícita tal que, per tot $x > 0$, $f(x, h(x)) = 12$. Considerar el punt $(2, 1)$.

4.1. Comprovar que es satisfan les hipòtesis del Teorema de la Funció Implícita.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2_+)$,
$(2,1) \in Int(\mathbb{R}^2_+)$,
$f(2,1) - 12 = 0$ i
$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 12 \neq 0$.

4.2. Trobar la derivada de la funció implícita h.

$h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{6xy}{3x^2} = -\frac{2y}{x}$, a on $y = h(x)$.

4.3. Avaluar h' en el punt $(2, 1)$.

$h'(2) = -\frac{2 \cdot 1}{2} = -1$.

4.4. Comprovar que $\nabla f(2, 1)$ és perpendicular al pendent de la funció implícita h en el punt $(2, 1)$. Fer un dibuix.

Com que $h'(2) = -1$, $\nabla f(2, 1)$ és perpendicular al pendent de la funció h en el punt $(2, 1)$ si, i només si, els vectors $\nabla f(2, 1)$ i $(-1, 1)$ són perpendiculars; és a dir,

$$(-1, 1) \cdot \nabla f(2, 1) = 0.$$

Però,

$$\begin{aligned} (-1,1) \cdot \nabla f(2,1) &= (-1,1) \cdot (12,12) \\ &= -12 + 12 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Per tant, $\nabla f(2, 1)$ és perpendicular al pendent de la funció h en el punt $(2, 1)$.