Universitat Autònoma de Barcelona

Departament d'Economia i d'Història Econòmica

# Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2007-2008. Proba I: J. Massó. 14-IV-2008.

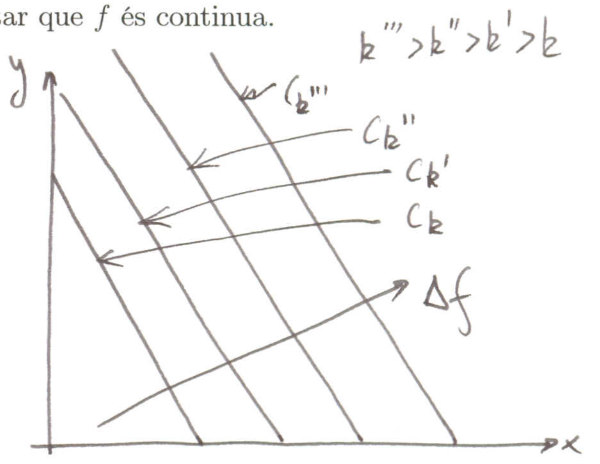
| Nom: SOLUCIÓ | Grup: 04 |
|---|---|

1. (3 punts) Dibuixar el mapa de corbes de nivell de la funció $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ a on per tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(x, y) = 2x + y$. Argumentar que $f$ és continua.

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 2x+y = k\}$

$y = k - 2x \qquad \frac{dy}{dx} = -2.$

$f$ és contínua ja que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(x,y) = 2 \cdot \pi_1(x,y) + \pi_2(x,y)$; és a dir, és la suma de dues funcions contínues.




2. (3 punts) Argumentar que el conjunt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x + 5y \leq 100\}$ és compacte. Demostrar, fent servir la definició, que $D$ és convex.

$Fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x = 0, 0 \le y \le 20\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid y = 0, 0 \le x \le 100\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x + 5y = 100\} \subseteq D$. Per tant, $D$ és tancat.

$D$ és fitat ja que $D \subset B((0,0), 22000)$. Per tant, $D$ és compacte.

Sigui $(x_1, y_1) \in D$ (és a dir, $x_1 + 5y_1 \le 100$ (1)) i $(x_2, y_2) \in D$ (és a dir, $x_2 + 5y_2 \le 100$ (2))

Volem demostrar que $\forall t \in [0,1]$, $t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2) \in D$; és a dir, que

$(tx_1 + (1-t)x_2) + 5(ty_1 + (1-t)y_2) = t(x_1 + 5y_1) + (1-t)(x_2 + 5y_2) \le 100.$

Per (1) i (2),

$t(x_1 + 5y_1) + (1-t)(x_2 + 5y_2) \le t \cdot 100 + (1-t)100 = 100$. Per tant,

$t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2) \in D$. És a dir, $D$ és convex.

Edifici B - Campus de la UAB - 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès) - Barcelona. Spain
Tel.: 34 - 93 581 12 00 - Fax: 34 - 93 581 20 12
d.econ.h.economica@uab.es
www.uab.es

3. (4 punts) Argumentar que el següent problema té solució: Triar $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ amb l'objecte de

$$\begin{array}{ll} \max & 2x + y \\ \text{subjecte a} & x + 5y \leq 100. \end{array}$$

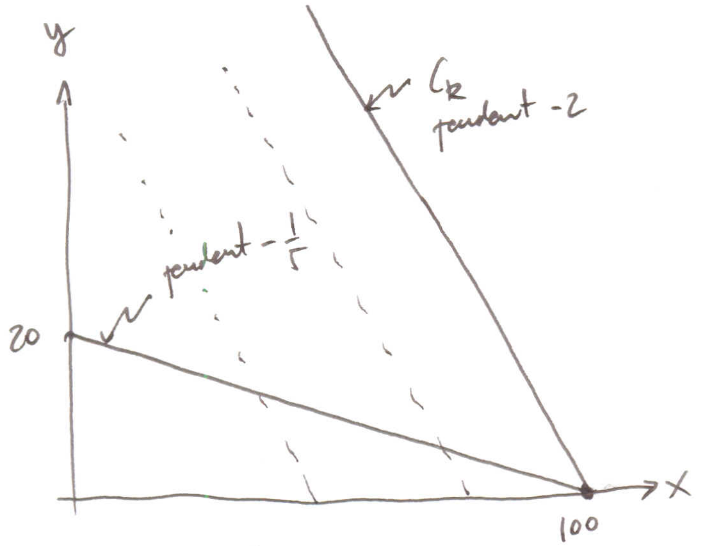
La funció $f(x,y) = 2x+y$ és contínua en $D$ i el conjunt $D$ és compacte. Per tant, pel Teorema de Weierstrass, $f$ té un màxim $(x^*, y^*)$ en el conjunt $D$. El vector $(x^*, y^*)$ és una solució del problema.

Trobar la solució i representar-la geomètricament.

La solució $(x^*, y^*)$ té la propietat de que $x^* + 5y^* = 100$

$$x + 5y = 100 \Rightarrow y = 20 - \frac{x}{5} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{restricció}} = -\frac{1}{5}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{C_k} = -2.$$




$x^* = 100,\ y^* = 0.$