Universitat Autònoma de Barcelona

Departament d'Economia i d'Història Econòmica

Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada.

Curs 2007-2008. Proba I: J. Massó. 14-IV-2008.

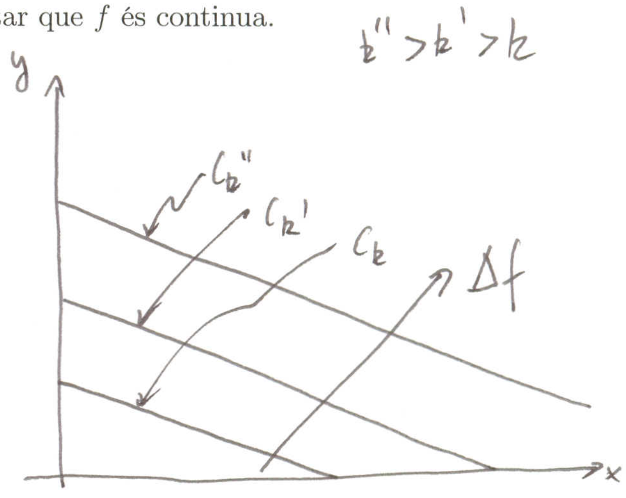
Nom: Solució	**Grup: 01**

1. (3 punts) Dibuixar el mapa de corbes de nivell de la funció $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ a on per tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(x, y) = x + 3y$. Argumentar que f és continua.

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x + 3y = k\}$

$y = \frac{k}{3} - \frac{x}{3}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$

f és contínua ja que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(x,y) = \pi_1(x,y) + 3\pi_2(x,y)$; és a dir, és la suma de dues funcions contínues.



2. (3 punts) Argumentar que el conjunt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 2x + y \leq 100\}$ és compacte. Demostrar, fent servir la definició, que D és convex.

$Fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x = 0, 0 \le y \le 100\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid y = 0, 0 \le x \le 50\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 2x + y = 100\} \subseteq D$. Per tant, D és tancat.

D és fitat ja que $D \subset B((0,0), 10.000)$. Per tant, D és compacte.

Sigui $(x_1, y_1) \in D$ (és a dir, $2x_1 + y_1 \le 100$ (1)) i $(x_2, y_2) \in D$ (és a dir, $2x_2 + y_2 \le 100$ (2)).

Volem demostrar que $\forall t \in [0,1]$, $t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2) \in D$; és a dir, que

$2(tx_1 + (1-t)x_2) + (ty_1 + (1-t)y_2) = t(2x_1 + y_1) + (1-t)(2x_2 + y_2) \le 100.$

Per (1) i (2),

$t(2x_1 + y_1) + (1-t)(2x_2 + y_2) \le t100 + (1-t)100 = 100$. Per tant,

$t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2) \in D$. És a dir, D és convex

Edifici B - Campus de la UAB - 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès) - Barcelona. Spain
Tel.: 34 - 93 581 12 00 - Fax: 34 - 93 581 20 12
d.econ.h.economica@uab.es
www.uab.es

3. (4 punts) Argumentar que el següent problema té solució: Triar $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ amb l'objecte de

$$\begin{aligned} &\max \quad x + 3y \\ &\text{subjecte a} \quad 2x + y \leq 100. \end{aligned}$$

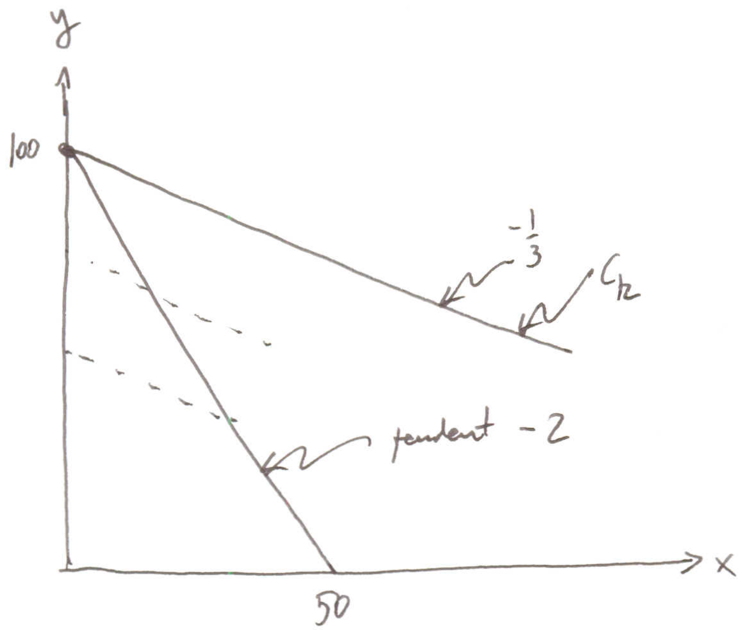
La funció $f(x,y) = x+3y$ és contínua en D i el conjunt D és compacte. Per tant, pel Teorema de Weierstrass, f té un màxim (x^*,y^*) en el conjunt D. El vector (x^*,y^*) és una solució del problema.

Trobar la solució i representar-la geomètricament.

La solució (x^*,y^*) té la propietat de que $2x^*+y^*=100$.

$2x+y=100 \Rightarrow y=100-2x$. $\quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\text{restricció}} = -2$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{C_k} = -\frac{1}{3}.$$



$x^*=0$, $y^*=100$.