Universitat Autònoma de Barcelona

Departament d'Economia i d'Història Econòmica

Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2008-2009. Proba I: J. Massó. 27-III-2009

Nom: SOLUCIÓ	Grup: 01

1. (3 punts) Dibuixar el mapa de corbes de nivell de la funció $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ a on per tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(x, y) = x \cdot y^{1/2}$. Argumentar que f és continua.

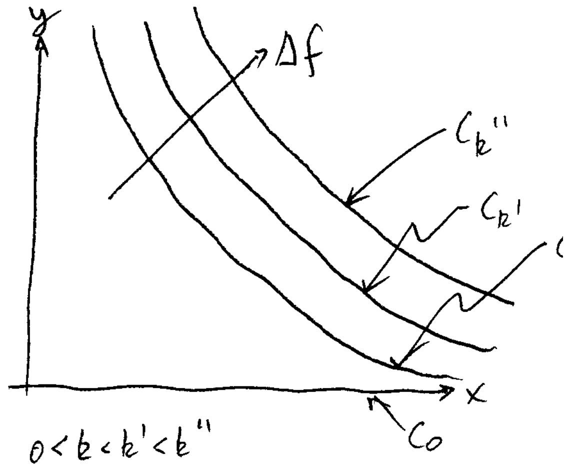
Per $k=0$, $C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x \cdot y^{1/2} = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x=0 \text{ ó } y=0\}$

Suposem que $k>0$ i $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x \cdot y^{1/2} = k\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid y = \frac{k^2}{x^2}\}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{C_k} < 0$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{C_k} > 0$



$0 < k < k' < k''$

f és continua ja que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+$,
$f(x,y) = \underbrace{\pi_1(x,y)}_{\text{contínua}} \cdot \underbrace{\pi_2(x_2,y)^{1/2}}_{\text{contínua}}$

el producte de dues funcions contínues és contínua

2. (3 punts) Argumentar que el conjunt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 4x + y \leq 600\}$ és compacte. Demostrar, fent servir la definició, que D és convex.

$Fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x=0 \text{ i } 0 \leq y \leq 600\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0 \text{ i } 0 \leq x \leq 150\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 4x+y = 600\} \subseteq D$. Per tant, D és tancat.

D es fitat ja que $D \subset B((0,0), 600^2)$. Per tant, D és compacte.

Sigui $(x_1,y_1) \in D$ (és a dir, $\underset{(1)}{4x_1+y_1 \leq 600}$) i $(x_2,y_2) \in D$ (és a dir, $4x_2+y_2 \underset{(2)}{\leq} 600$)

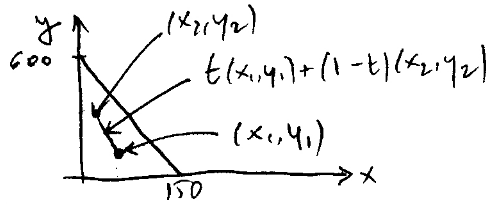
Volem demostrar que $\forall t \in (0,1)$, $t(x_1,y_1)+(1-t)(x_2,y_2) \in D$; és a dir, que

$4 \cdot (tx_1+(1-t)x_2) + (ty_1+(1-t)y_2) = t(4x_1+y_1)+(1-t)(4x_2+y_2) \leq 600$.

Per (1) i (2),

$t(4x_1+y_1)+(1-t)(4x_2+y_2) \leq t \cdot 600 + (1-t)600 = 600$. Per tant, D és convex

Gràficament



Edifici B - Campus de la UAB - 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès) - Barcelona. Spain
Tel.: 34 - 93 581 12 00 Fax: 34 - 93 581 20 12

3. (4 punts) Argumentar que el següent problema té solució: Triar $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ amb l'objecte de

$$\text{maximitzar} \quad x \cdot y^{1/2}$$
$$\text{subjecte a} \quad 4x + y \leq 600.$$

La funció $f(x,y) = x \cdot y^{1/2}$ és contínua en D i el conjunt D és compacte. Per tant, pel Teorema de Weierstrass, f té un màxim (x^*, y^*) en el conjunt D. El vector (x^*, y^*) és una solució del problema.

Trobar la solució i representar-la geomètricament.

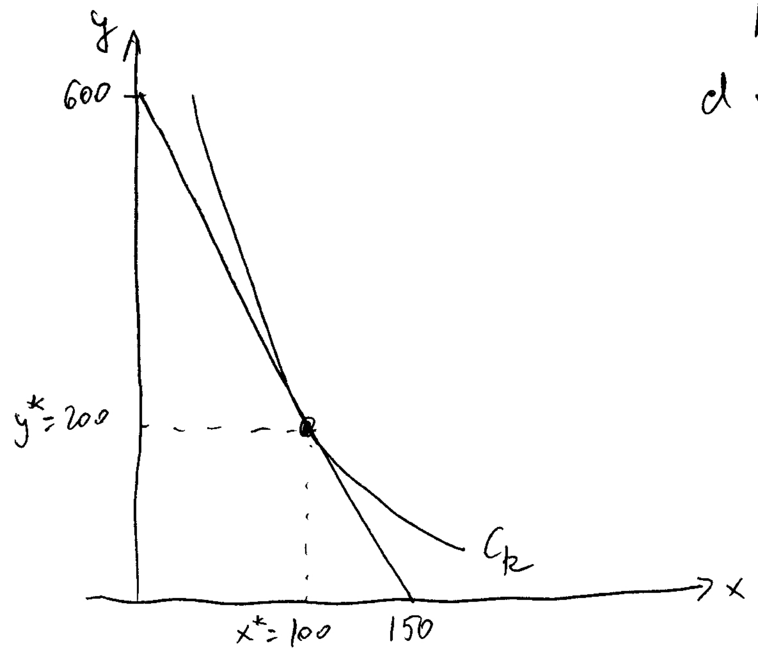
La solució (x^*, y^*) té la propietat de que la corba de nivell que conté (x^*, y^*) és tangent a la recta $4x+y=600$. (3)

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x \cdot y^{1/2} = k\} \Rightarrow y = \frac{k^2}{x^2}$ $\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{C_k} = -\frac{2xk^2}{x^4} = -\frac{2k^2}{x^3}$ (1)

Però com que $xy^{1/2} = k$, per (1) tenim que $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{C_k} = -\frac{2x^2y}{x^3} = -\frac{2y}{x}$. (2).

La recta $y = 600 - 4x$ té pendent -4. Per tant (x^*, y^*) és el vector tal que

$-4 = -\frac{2y}{x} \iff 4x = 2y$ (4) Per (3), $2y + y = 600 \Rightarrow y^* = 200$. Per (4), $x^* = 100$



La solució del problema és el vector:

$(x^*, y^*) = (100, 200)$.