Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2007-2008. Proba III: J. Massó. 30-V-2008

Cognom:	**Nom:**	**Grup:** 04

Considerem les funcions $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ tals que per tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2_{++}$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy^2 \\ g(x,y) &= 2x + 2y - 12. \end{aligned}$$

Trobar els extrems locals restringits de f a $g^{-1}(0)$.

Comprovem que les condicions del Teorema 1 de Lagrange (C.P.O.) es satisfan: $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2_{++})$ i $rang J_g(x, y) = rang(2, 2) = 1$. Suposem que (x_0, y_0) és un extrem local restringit de f a $g^{-1}(0)$ i que $x_0 > 0$ i $y_0 > 0$ (és a dir, $(x_0, y_0) \in Int(\mathbb{R}^2_{++})$). Definim el Lagrangià $L(x, y, \lambda) = xy^2 - \lambda[2x + 2y - 12]$. Aleshores,

(1) $\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = y^2 - 2\lambda = 0.$

(2) $\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2xy - 2\lambda = 0.$

(3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -2x - 2y + 12 = 0.$

Per (1), $y^2 = 2\lambda$. Per (2), $2xy = 2\lambda$. Per tant, $y^2 = 2xy$. Dividint per y (ja que $y \neq 0$), $y = 2x$. Per (3), $y + 2y = 3y = 12$. Per tant, $y_0 = 4$, $x_0 = 2$ i $\lambda_0 = 8$. Efectivament, $(x_0, y_0) \in Int(\mathbb{R}^2_{++})$. Per tant, el vector $(x_0, y_0, \lambda_0) = (2, 4, 8)$ és l'únic punt critic del Lagrangià i l'unic possible extrem local restringit de f a $g^{-1}(0)$.

Per determinar si $(2, 4, 8)$ és màxim o minim local restringit de f a $g^{-1}(0)$, observem que $r = 2$ ja que $n = 2$ i $m = 1$. Busquem el signe de

$$\Delta_2(x_0, y_0, \lambda_0) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{pmatrix}.$$

És a dir,

$$\Delta_2(x_0, y_0, \lambda_0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2y \\ 2 & 2y & 2x \end{pmatrix}. \text{ Per tant, } \Delta_2(2, 4, 8) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 48.$$

Com que $(-1) \cdot \Delta_2(2, 4, 8) = -48 < 0$ i $(-1)^2 \cdot \Delta_2(2, 4, 8) = 48 > 0$, $(x_0, y_0) = (2, 4)$ és un màxim local restringit de f a $g^{-1}(0)$.