Matemàtiques per a Economistes II. Docència tutelada

Curs 2007-2008. Proba II: J. Massó. 16-V-2008

Cognom:	**Nom:**	**Grup:**

Sigui $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ la funció de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ definida per $f(x,y) = x \cdot y^3$.

1. (2 punts) Trobar el gradient $\nabla f(x,y)$. Avaluar-lo en el punt $(3,2)$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\ &= \left(y^3, 3xy^2\right). \\ \nabla f(3,2) &= (8,36). \end{aligned}$$

2. (2 punts) Trobar el hessià $H_f(x,y)$ i comprovar el Teorema de Schwartz. Avaluar-lo en el punt $(3,2)$.

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3y^2 \\ 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}. \\ H_f(3,2) &= \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teorema de Schwartz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3y^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

3. (2 punts) Fent servir la definició, determinar el grau de homegeneitat de f. Comprovar el Teorema de Euler.

Sigui $t > 0$. Per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$f(tx,ty) = (tx)(ty)^3 = t^4 xy^3 = t^4 f(x,y).$$

Per tant, f és homogènia de grau $k = 4$. Comprovem el Teorema de Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy^3 + y3xy^2 = xy^3 + 3xy^3 = 4xy^3 = kf(x,y).$$

4. (4 punts) Sigui $h : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ la funció implícita tal que, per tot $x > 0$, $f(x, h(x)) = 24$. Considerar el punt $(3, 2)$.

4.1. Comprovar que es satisfan les hipòtesis del Teorema de la Funció Implícita.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2_+)$,

$(3, 2) \in Int(\mathbb{R}^2_+)$,

$f(3, 2) - 24 = 0$ i

$\frac{\partial f}{\partial y}(3, 2) = 36 \neq 0$.

4.2. Trobar la derivada de la funció implícita h.

$h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{y^3}{3xy^2} = -\frac{y}{3x}$, a on $y = h(x)$.

4.3. Avaluar h' en el punt $(3, 2)$.

$h'(3) = -\frac{2}{3 \cdot 3} = -\frac{2}{9}$.

4.4. Comprovar que $\nabla f(3, 2)$ és perpendicular al pendent de la funció implícita h en el punt $(3, 2)$. Fer un dibuix.

Com que $h'(3) = -\frac{2}{9}$, $\nabla f(3, 2)$ és perpendicular al pendent de la funció h en el punt $(3, 2)$ si, i només si, els vectors $\nabla f(3, 2)$ i $(-3, \frac{2}{3})$ són perpendiculars; és a dir,

$$(-3, \frac{2}{3}) \cdot \nabla f(3, 2) = 0.$$

Però,

$$\begin{aligned}
(-3, \frac{2}{3}) \cdot \nabla f(3, 2) &= (-3, \frac{2}{3}) \cdot (8, 36) \\
&= -24 + 24 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Per tant, $\nabla f(3, 2)$ és perpendicular al pendent de la funció h en el punt $(3, 2)$.