Exámen de Matemáticas para Economistas II (25030)

Profesor (grupos): Jordi Massó (02, 03)
Segunda convocatoria: 5 de Septiembre, 2006

1.- (25 puntos) Determinar (justificando la respuesta) si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos, cerrados, acotados, compactos y/o convexos:

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 < x < 4, 1 < y < 2\} \\
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, x = -y\} \\
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \\
D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\} \\
E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4\}.
\end{aligned}$$

Dar un razonamiento que justifique que la función $f : E \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x - 2y^2$ tiene un máximo y un mínimo en el conjunto E.

2.- (25 puntos) Encontrar las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + (xy - x^2 + y^2)^3.$$

Hallar $\nabla f(1,0)$, el gradiente de f en el punto $(1,0)$.

3.- (25 puntos) Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $F(x,y,z) = e^{-x^2} - e^{2y} + e^z - 1$. Estudiar la existencia de la función implícita $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$, definida por la relación $F(x,y,z) = 0$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$. Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e interpretar su significado.

4.- (25 puntos) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$. Hallar los puntos críticos de f. Determinar, estudiando la matriz hesiana $H_f(x,y)$, si son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

Revisión de exámen: Miércoles 13 de Septiembre de 2006 de 11 a 13 en el despacho B3-1116.