Examen de Matemáticas para Economistas II (25030)

Profesor (grupos): Jordi Massó (02, 03)
Primera convocatoria: 22 de Junio, 2006

1.- (25 puntos) Determinar (justificando la respuesta) si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos, cerrados, acotados, compactos y/o convexos:

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 1 < y < 2\} \\
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, x = y\} \\
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \\
D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\} \\
E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3, 5 \leq y \leq 8\}.
\end{aligned}$$

Dar un razonamiento que justifique que la función $f : E \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - 2y$ tiene un máximo y un mínimo en el conjunto E.

2.- (20 puntos) Encontrar las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 + (xy + x^2 - y^2)^2.$$

Hallar $\nabla f(1,1)$, el gradiente de f en el punto $(1,1)$.

3.- (20 puntos) Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $F(x,y,z) = xyz - xz^2 + y^3 z - 1$. Estudiar la existencia de la función implícita $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$, definida por la relación $F(x,y,z) = 0$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (0,1,1)$. Calcular $\nabla f(0,1)$ e interpretar su significado.

4.- (10 puntos) Clasificar (justificando la respuesta) la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.- (25 puntos) Hallar los extremos locales de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x + 1$ restringidos al conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Revisión de examen: Lunes 3 de Julio de 2006 de 11 a 13 en el despacho B3-1116.