MICROECONOMÍA II

PRÁCTICA TEMA 5: El Modelo de Equilibrio General con Intercambio Puro

PRIMERA PARTE: La Caja de Edgeworth y la Curva de Contrato

Problema 1

El conjunto de asignaciones eficientes está recogido en la curva de contrato. La curva de contrato muestra todas las combinaciones de asignaciones posibles que son óptimos de Pareto. Es decir, recoge todas aquellas asignaciones tal que no es posible mejorar la utilidad de un individuo sin empeorar la del otro.
En una economía de dos bienes y dos individuos, podemos encontrar el conjunto de asignaciones eficientes igualando la relación marginal de sustitución de los dos individuos:

$$RMS^A = RMS^B$$

Sabemos que la relación marginal de sustitución de un individuo genérico i viene dado por:

$$RMS^i = \frac{\frac{\partial u^i(x_1^i, x_2^i)}{\partial x_1^i}}{\frac{\partial u^i(x_1^i, x_2^i)}{\partial x_B^i}} \;\; para \; i = A, B.$$

Calculando la relación marginal de sustitución para cada individuo, obtenemos que:

$$RMS^A = \frac{\frac{\partial u^A(x_1^A, x_2^A)}{\partial x_1^A}}{\frac{\partial u^A(x_1^A, x_2^A)}{\partial x_B^A}} = \frac{2x_1^A x_2^A}{(x_1^A)^2}$$

$$RMS^B = \frac{\frac{\partial u^B(x_1^B, x_2^B)}{\partial x_1^B}}{\frac{\partial u^B(x_1^B, x_2^B)}{\partial x_B^B}} = \frac{x_2^B}{x_1^B}$$

Si sumamos las dotaciones que tiene el individuo A y el individuo B del bien 1, obtenemos que el total de dotaciones del bien 1 son 20 (=15+5). De igual forma, el total de dotaciones del bien 2 son 20 (=3+17). Por la condición de factibilidad, sabemos que $x_2^B = 20 - x_2^A$ y que $x_1^B = 20 - x_1^A$. Igualando las relaciones marginales de sustitución de ambos individuos e introduciendo las condiciones de factibilidad, obtenemos que:

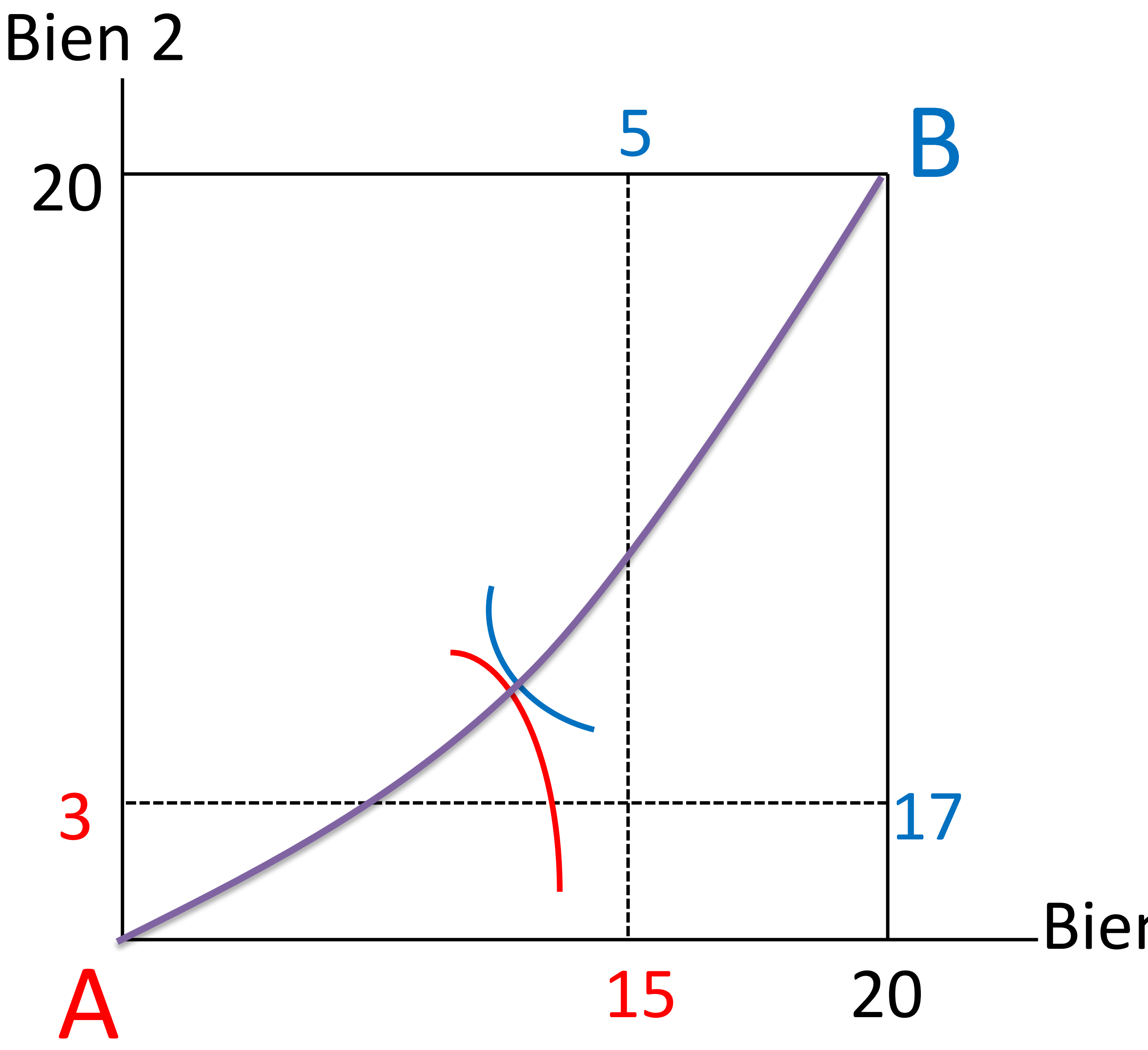
$$\frac{2x_2^A}{x_1^A} = \frac{20 - x_2^A}{20 - x_1^A}$$

Finalmente, aislamos x_2^A de esta ecuación y obtenemos que el conjunto de asignaciones eficientes son las asignaciones que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x_2^A = \frac{20x_1^A}{40 - x_1^A}$$

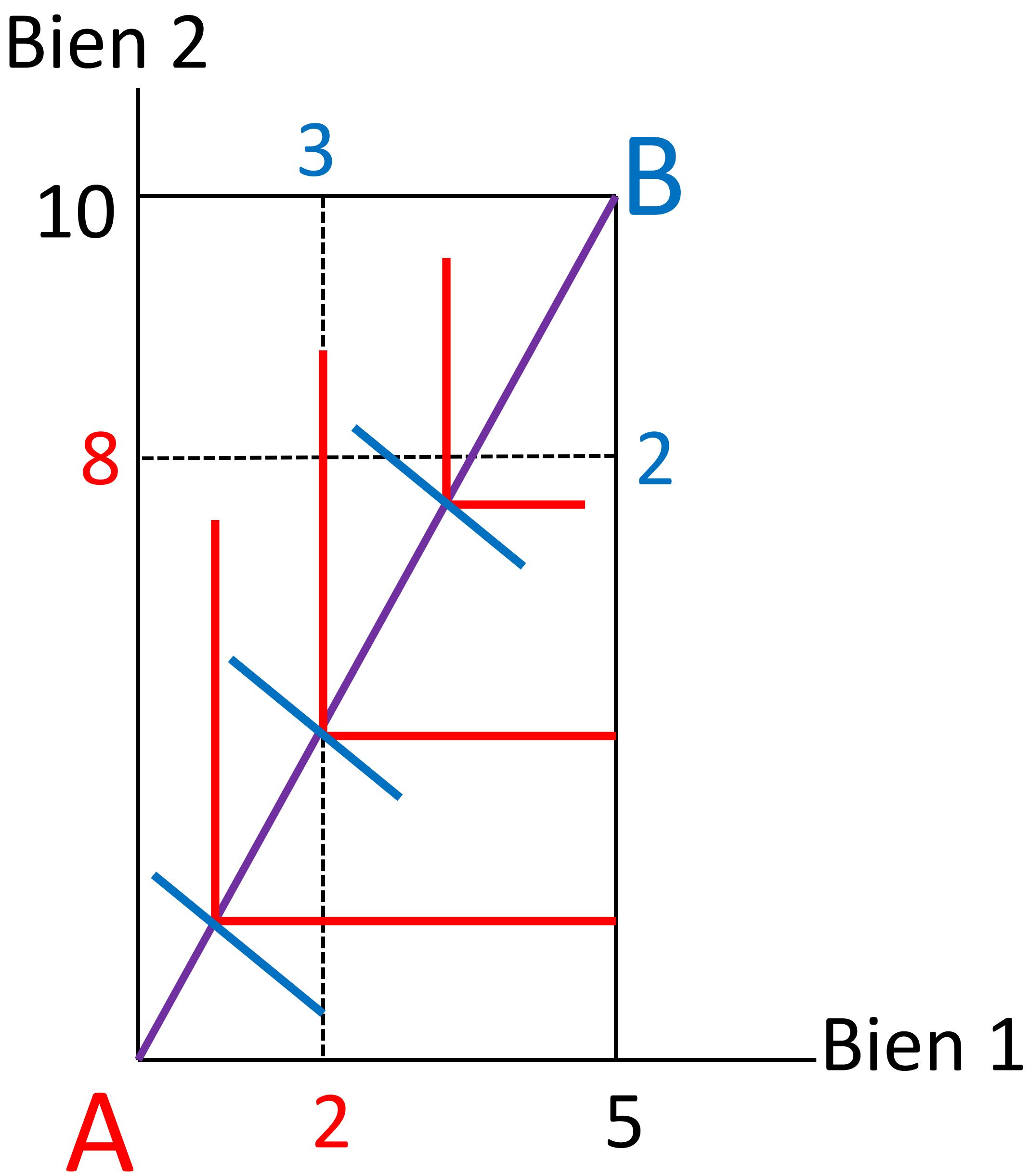
Similarmente, podríamos haber obtenido la curva de contrato como el conjunto de asignaciones eficientes que satisfacen la ecuación $40x_1^B/(20 + x_1^B) = x_2^B$. Para ello, deberíamos haber introducido en la igualdad de las relaciones marginales de sustitución de los dos agentes las condiciones de factibilidad $x_2^A = 20 - x_2^B$ y $x_1^A = 20 - x_1^B$.

Si dibujamos en una caja de Edgeworth el conjunto de asignaciones eficientes, obtendríamos:



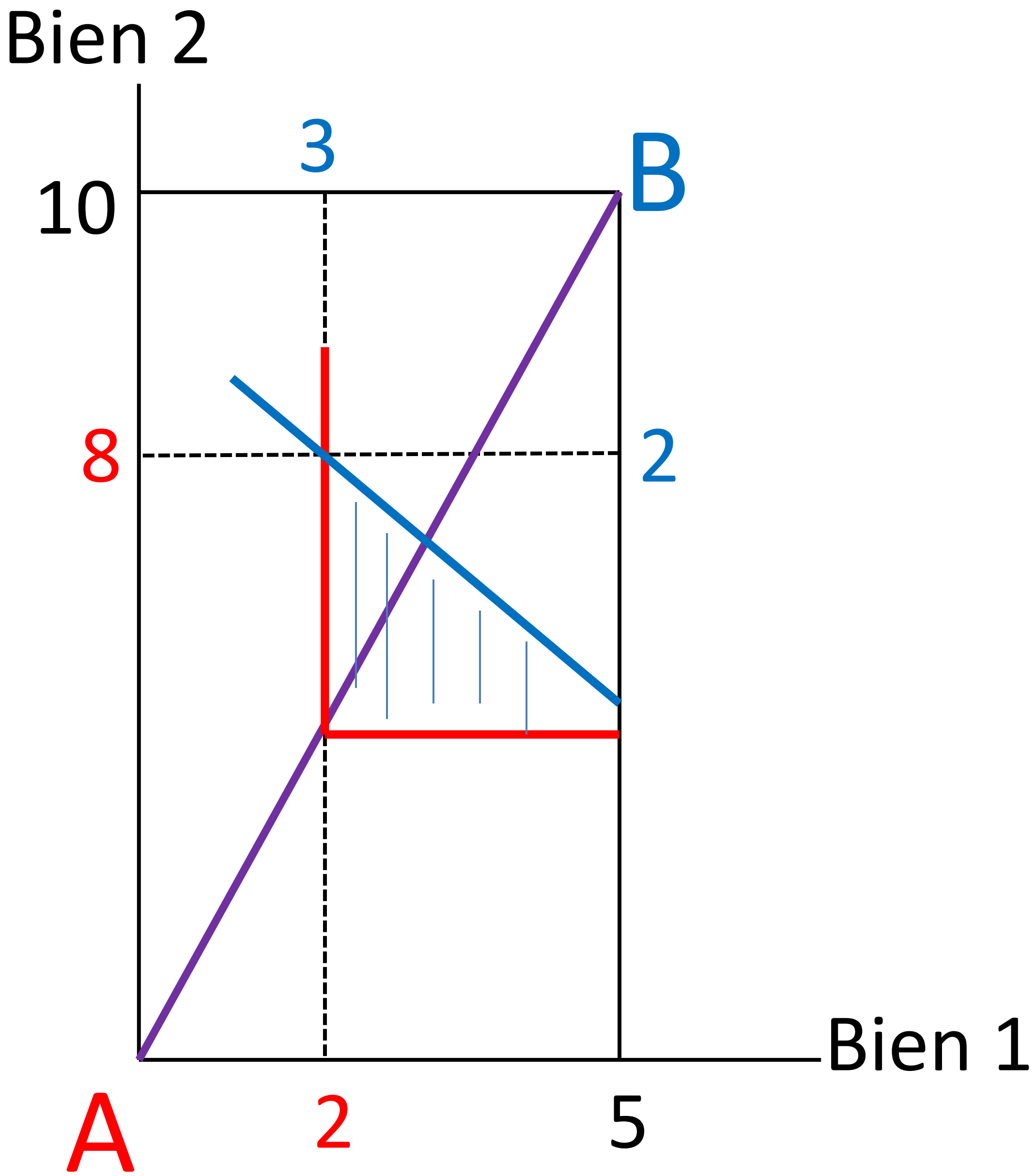
Donde el color rojo representa el individuo A y el azul el B. Los números en rojo de la caja de Edgeworth son las dotaciones de A y los números en azul son las dotaciones de B. La curva roja representa las preferencias de A, mientras la azul las de B. Los números en negro son la cantidad de dotación total del bien 1 y el bien 2. La curva lila es la curva de contrato, que muestra el conjunto de asignaciones eficientes.

Problema 2
Primero, dibujamos la caja de Edgeworth:



Las preferencias rojas son las de A, mientras que las azules son las de B. Los números en rojo son las dotaciones de A, mientras que los números en azul son las de B. La línea lila es la curva de contrato.
En este ejercicio, los bienes son complementarios perfectos para A y sustitutos perfectos para B. Debido a la forma de las preferencias, no podemos utilizar la condición de tangencia. Las asignaciones eficientes estarán situadas sobre los vértices de las curvas de indiferencia del consumidor A; es decir, las asignaciones eficientes son $x_2^A = 2x_1^A$.

La dotación inicial no está en la curva de contrato, ya que todos los intercambios en la región con rallas son mutuamente beneficiosos para los dos consumidores (alcanzan curvas de indiferencia mejores ambos), y sólo el vértice es un intercambio eficiente.



Problema 3

a) La ley de Walras consiste en que, en caso de que las preferencias sean monótonas, el valor de la función de exceso de demanda es 0. Formalmente, la monotonía implica que $pZ(p) = 0$.
La demostración consiste en lo siguiente: La monotonía implica que $\forall i$ y $\forall p$, p$d_i^N(p)$=0, donde $d_i^N(p)$ es un vector de l bienes (o componentes) que muestra la demanda neta del inviduo i para cada bien. La demanda neta es la diferencia entre la demanda del bien y la dotación, de forma que $d_i^N(p) = d_i(p) - w_i$, donde w_i es un vector de dotaciones de l bienes (o componentes). Sumando p$d_i^N(p)$=0 para m agentes de la economía, obtenemos que p$\sum_{i=1}^{m} d_i^N(p)$=0. Date cuenta que la función de exceso de demanda $Z(p) = \sum_{i=1}^{m} d_i^N(p)$, de forma que $pZ(p) = 0$.
Recuerda que nuestro ejercicio solo tiene 2 bienes y 2 individuos.

La intuición de ley de Walras, consiste en explicar que los mercados se vacían, pues el valor de la función de exceso de demanda bajo monotonía es 0. Ésta ley tiene dos implicaciones:

1) Si un mercado tiene exceso de oferta, existe algún otro mercado con exceso de demanda.
2) Si $l-1$ mercados están en equilibrio, el mercado l también lo estará.

b) Para calcular el equilibrio competitivo de esta economía, primero tenemos que resolver el problema de maximización de los individuos A y B.

Empezamos con el individuo A. Su problema consiste en resolver:

$$Max\ (x_1^A)^2 x_2^A$$
$$st\ P_1 x_1^A + P_2 x_2^A = P_1 15 + P_2 3$$

El lagrangiano del problema sería el siguiente:

$$L = (x_1^A)^2 x_2^A + \boldsymbol{\lambda}[P_1 15 + P_2 3 - P_1 x_1^A - P_2 x_2^A]$$

Toma la condición de primer orden del lagrangiano con respecto x_1^A y x_2^A, y obtén:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^A} = 0 \Leftrightarrow 2x_1^A x_2^A = \boldsymbol{\lambda} P_1$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1^B} = 0 \Leftrightarrow (x_1^A)^2 = \boldsymbol{\lambda} P_2$$

Divide las dos condiciones de primer orden entre sí, y obtén que:

$$\frac{2x_2^A}{x_1^A} = \frac{P_1}{P_2}$$

Aísla x_2^A y obtén que:

$$x_2^A = \frac{P_1}{P_2}\frac{x_1^A}{2}$$

Introduce x_2^A en la restricción presupuestaria del individuo A, y obtén:

$$P_1 x_1^A + P_2 \frac{P_1}{P_2}\frac{x_1^A}{2} = P_1 15 + P_2 3$$

Ahora, fácilmente aísla x_1^A de esta ecuación lineal, y obtén que:

$$x_1^A = 10 + \frac{2P_2}{P_1} = 10 + \frac{2}{P}$$

Hemos llamado $P = P_1/P_2$. Con esto, estamos normalizando el precio del bien 2 a 1, y consideramos P como el precio del bien 1 relativo al precio del bien 2.

Ahora, introduce x_1^A en la previa ecuación de x_2^A y obtén que:

$$x_2^A = \frac{P}{2}\left(10 + \frac{2}{P}\right) = 5P + 1$$

De forma que ya hemos obtenido las funciones de demanda del individuo A para el bien 1 y 2:

$$x_1^A = 10 + \frac{2}{P}$$
$$x_2^A = 5P + 1$$

Ahora, tenemos que obtener la función de demanda para el individuo B. El individuo B resuelve el siguiente problema:

$$Max\ x_1^B x_2^B$$
$$st\ P_1 x_1^B + P_2 x_2^B = P_1 5 + P_2 17$$

Debido a la similitud de ambos problemas, el procedimiento será omitido (es exactamente el mismo). Fácilmente, debes obtener que:

$$x_1^B = 2.5 + \frac{8.5}{P}$$
$$x_2^B = 2.5P + 8.5$$

Ahora analizamos para que precios en el mercado de un bien, la función de exceso de demanda es 0. Por ejemplo, coge la función de exceso de demanda del bien 2 e iguala a 0:

$$z_2(p) = x_2^A + x_2^B - w_2^A - w_2^B = 0$$

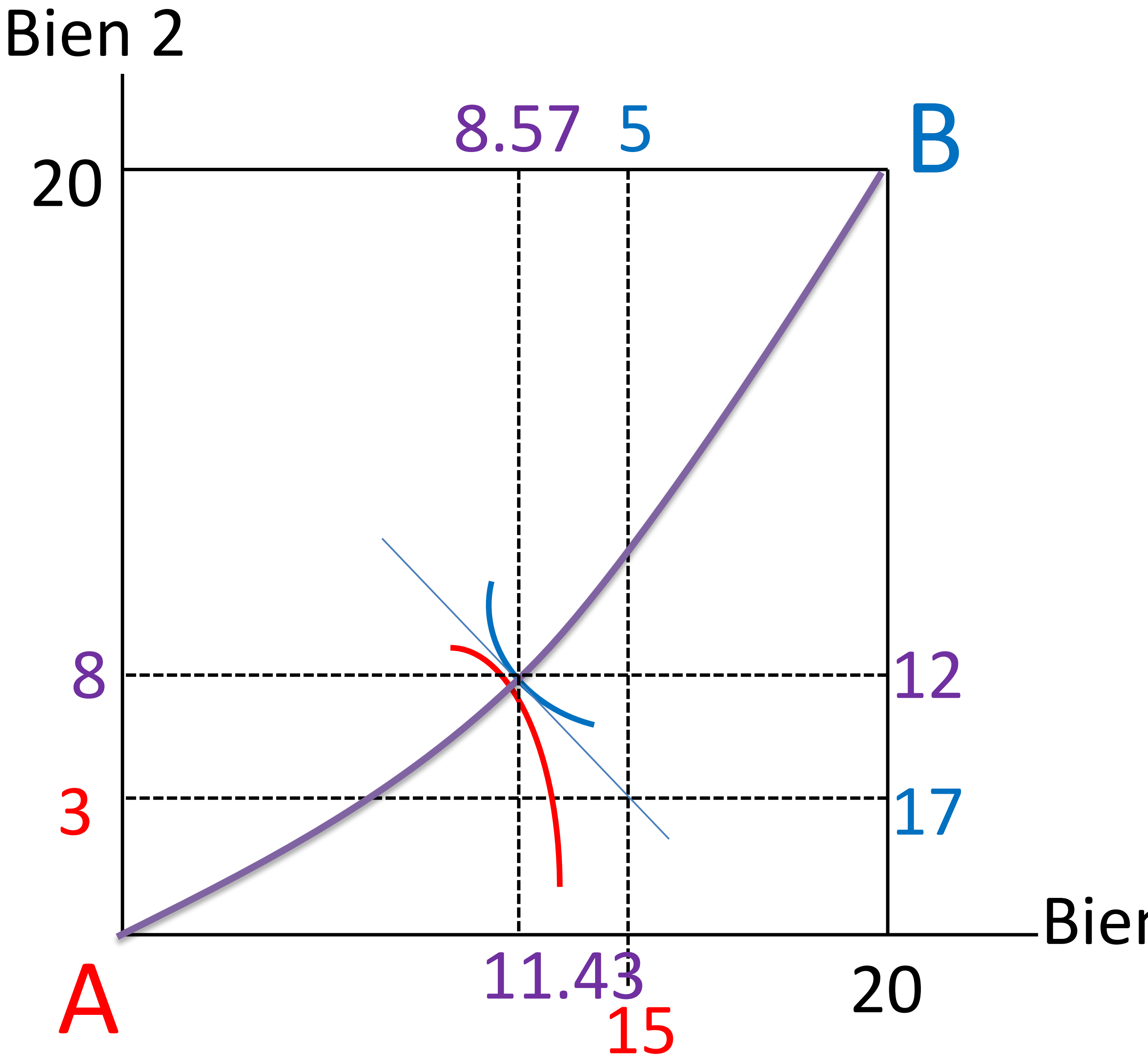
Por lo tanto

$$5P + 1 + 2.5P + 8.5 - 3 - 17 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que P=1.4. Además, por la ley de Walras sabemos que si el mercado del bien 2 está en equilibrio, el mercado del bien 1 también lo está para estos precios (puedes comprobarlo vaciando el mercado del bien 1). Finalmente, introducimos los precios en las funciones de demanda obtenidas anteriormente y obtenemos que el equilibrio competitivo viene dado por:

$$x_1^A = 10 + \frac{2}{P} = 11.43$$
$$x_2^A = 5P + 1 = 8$$
$$x_1^B = 2.5 + \frac{8.5}{P} = 8.57$$
$$x_2^B = 2.5P + 8.5 = 12$$

Gráficamente:



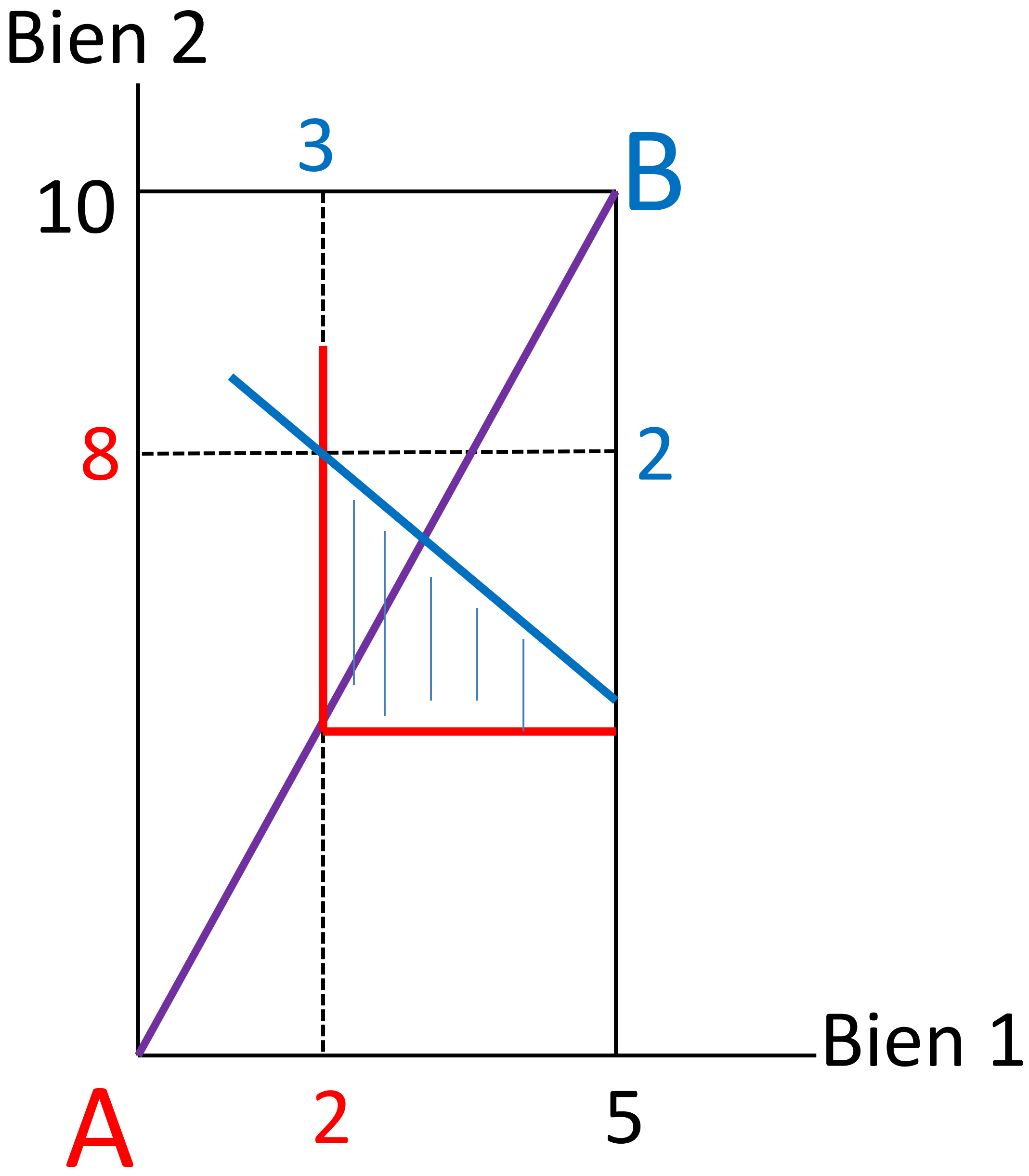
Donde los números en lila representa el equilibrio competitivo.

c) La asignación sí que puede formar parte de un equilibrio competitivo de esta economía. Para verlo, simplemente introduce el equilibrio propuesto en la curva de contrato $x_2^A = \frac{20x_1^A}{40-x_1^A}$, $40x_1^B/(20+x_1^B) = x_2^B$, y date cuenta que las igualdades se cumplen. Vemos que esta asignación puede ser un equilibrio competitivo, siempre y cuando los agentes tuvieran distintas dotaciones a las que les da el ejercicio. Vamos a mantener las dotaciones del bien 2 como constantes, y vamos a determinar con que distribución de dotaciones para el bien 1 obtendríamos el equilibrio propuesto.
Primero, date cuenta que, para unas dotaciones w_1^A y w_1^B genéricas, obtenemos que:

$$x_1^A = \frac{w_1^A}{1.5} + \frac{2}{P}$$
$$x_1^B = \frac{w_1^B}{2} + \frac{8.5}{P}$$
Introduce en x_1^B la condición de factibilidad $w_1^B = 20 - w_1^A$. Además, sabemos que en el equilibrio propuesto, $x_1^A = x_1^B = 10$. Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:
$$10 = \frac{w_1^A}{1.5} + \frac{2}{P}$$
$$10 = \frac{20 - w_1^A}{2} + \frac{8.5}{P}$$
Resolviendo el sistema, obtenemos que $P = 1.333$, $w_1^A = 12.75$ y finalmente, $w_1^B = 20 - w_1^A = 20 - 12.75 = 7.25$.
Con estas dotaciones y precios, obtendríamos el equilibrio competitivo propuesto.

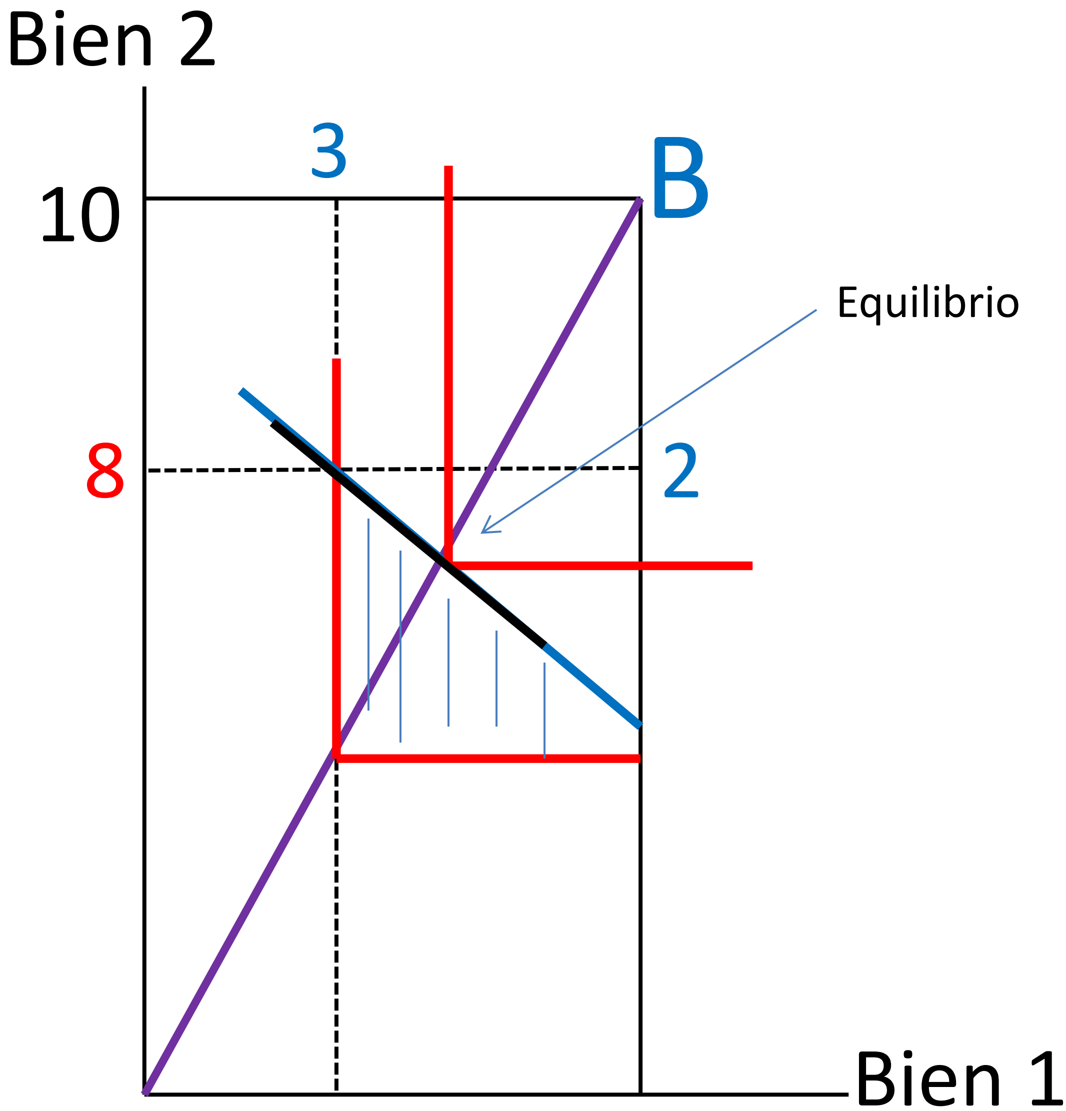
Problema 4

a) Primero, resolvemos el problema gráficamente. El problema tiene los mismos datos que en el ejercicio 2, por lo que la caja de Edgeworth es la siguiente:



Debemos encontrar un vector de precios tal que la restricción de ambos agentes sea tangente a la relación marginal de sustitución de las preferencias de ambos. Debido a la naturaleza de las preferencias, la tangencia no se dará. De todas maneras, esta restricción debería pasar por el vértice de las preferencias de A y sobreponerse sobre las preferencias de B. Por ello, la restricción debe tener la misma forma que las preferencias de B. Como las preferencias de B son indiferentes en una relación 1 a 1 entre los dos bienes, los precios de los dos bienes deben ser el mismo para que la restricción se solape con dichas preferencias.

Por lo tanto, tomando el precio del bien 2 como numerario, P=1 vacía el mercado, de forma que el equilibrio gráfico sería así:



Resolvemos el problema analíticamente. El problema de A viene dado por:

$$Max\ \min\{2x_1^A, x_2^A\}$$
$$st\ P_1 x_1^A + P_2 x_2^A = 2P_1 + 8P_2$$

Debido a que las preferencias son complementarios perfectos, obtenemos que $2\,x_1^A = x_2^A$ (esto corresponde con la curva de contrato, debido a que las preferencias de B son lineales). Introduciendo esta igualdad en la restricción presupuestaria y aislando, obtenemos que:

$$x_1^A = \frac{2P_1 + 8P_2}{P_1 + 2P_2}$$

$$x_2^A = \frac{4P_1 + 16P_2}{P_1 + 2P_2}$$

Por el razonamiento anterior, P=1, de forma que:

$$x_1^A = 10/3$$
$$x_2^A = 20/3$$

Mientras lo que no consume A es obtenido por B:

$$x_1^B = 5/3$$
$$x_2^B = 10/3$$

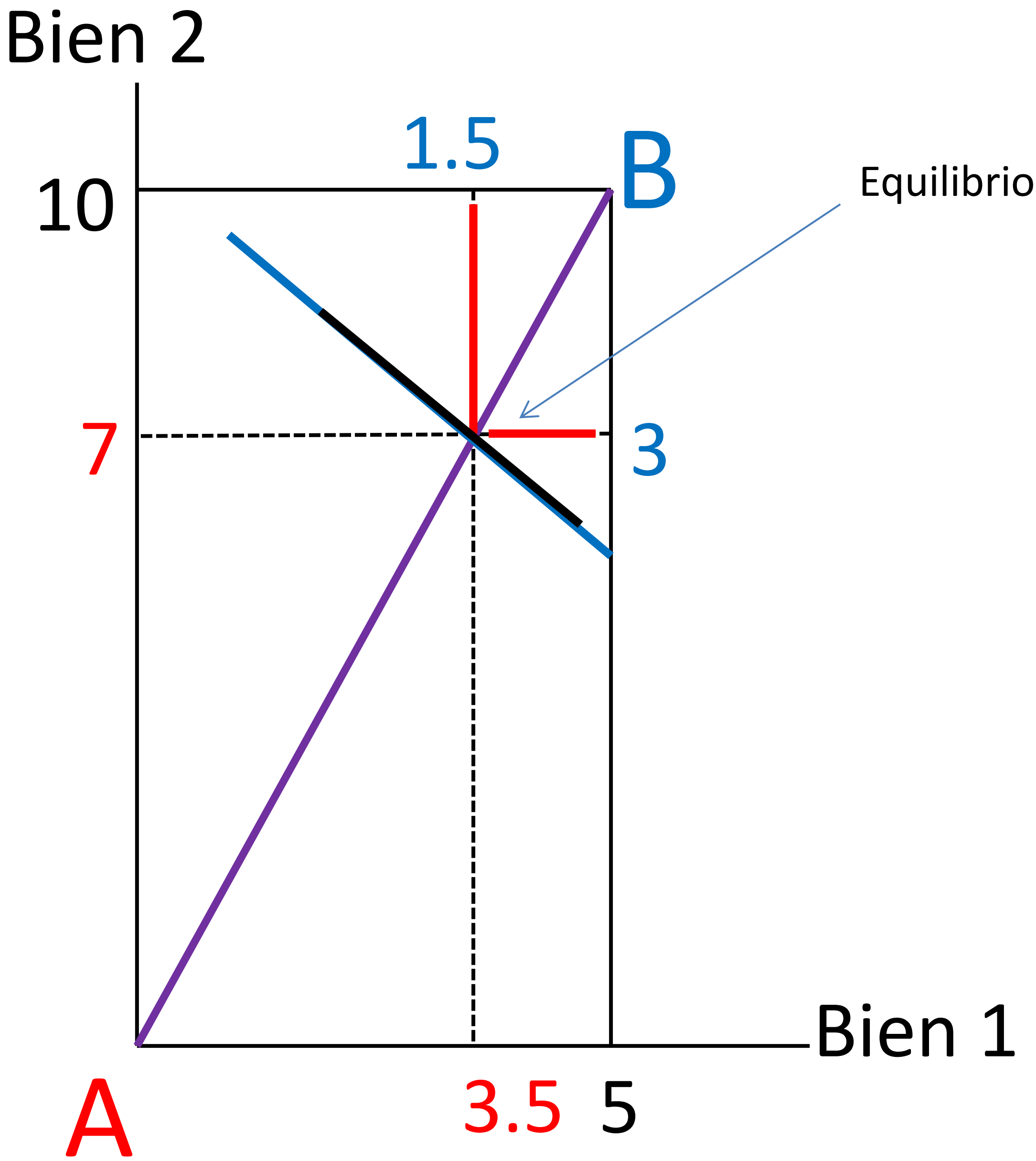
Date cuenta que con el intercambio, la utilidad de A ha aumentado de 2 a 10/3, mientras que la utilidad de B se mantiene constante con el intercambio (pues nos movemos a lo largo de su curva de indiferencia).

b) La nueva asignación propuesta si puede formar parte de un equilibrio competitivo. Para ver ésto, date cuenta de que $((x_1^A, x_2^A), (x_1^B, x_2^B))$ = ((3.5,7),(1.5,3)) forma parte de la curva de contrato, dada por $2\,x_1^A = x_2^A$ (simplemente introduce la asignación en la curva de contrato y comprueba que se da la igualdad).

Debido a que las preferencias siguen siendo las mismas para ambos agentes, y como la restricción debe sobreponerse a las preferencias de B y pasar por el vértice de las preferencias de A, los precios han de ser los mismos que en el ejercicio anterior: P=1.

Para alcanzar éste equilibrio, por lo tanto, las dotaciones deben ser tales que se encuentren sobrepuestas a la curva de indiferencia de B que pasan por el punto de equilibro propuesto. En particular, este equilibrio se alcanzará si (w_1^B, w_2^B) son tales que $w_1^B + w_2^B = 4.5$, satisfaciendo $w_1^A + w_1^B = 5, w_2^A + w_2^B = 10$.

Gráficamente:



Problema 5

Brevemente, explicaremos analíticamente por que no existe un vector de precios que vacia el mercado. Luego, lo analizamos gráficamente.

Primero, vamos a resolver el problema del agente A, que viene dado por:

$$Max \min\{x_1^A, x_2^A\}$$
$$st\ P_1x_1^A + P_2x_2^A = P_1 + 2P_2$$

Debido a que las preferencias son complementarios perfectos, obtenemos que $x_1^A = x_1^B$.

Introduciendo esta igualdad en la restricción presupuestaria y aislando, obtenemos que:

$$x_1^A = x_2^A = \frac{P_1 + 2P_2}{P_1 + P_2}$$

Normaliza con $P = P_1/P_2$. Obtenemos que:

$$x_1^A = x_2^A = \frac{P+2}{P+1}$$

Ahora, resolvemos para el agente B. Su problema es el siguiente:

$$Max\ (x_1^B)^2 + (x_2^B)^2$$
$$st\ P_1 x_1^B + P_2 x_2^B = 2P_1 + P_2$$

Resolviendo el problema exactamente igual que hicimos en el ejercicio 3, obtenemos que:

$$x_1^B = \frac{2P^2 + P}{P^2 + 1}$$
$$x_2^B = \frac{2P + 1}{P^2 + 1}$$

Vaciamos los mercados, por ejemplo, para el bien 2, tal y como hicimos en el ejercicio 3, y obtenemos que:

$$P^3 + 4P^2 + 4P + 3 = 0$$

Si intentamos resolver esta ecuación de 3r grado, veríamos que solo hay una solución negativa, que no tiene sentido económico. De modo que no existe un vector de precios que vacíe el mercado.

La razón por la que esto pasa es que la función del agente B es cóncava. Para ver ésto, toma la función del agente B:

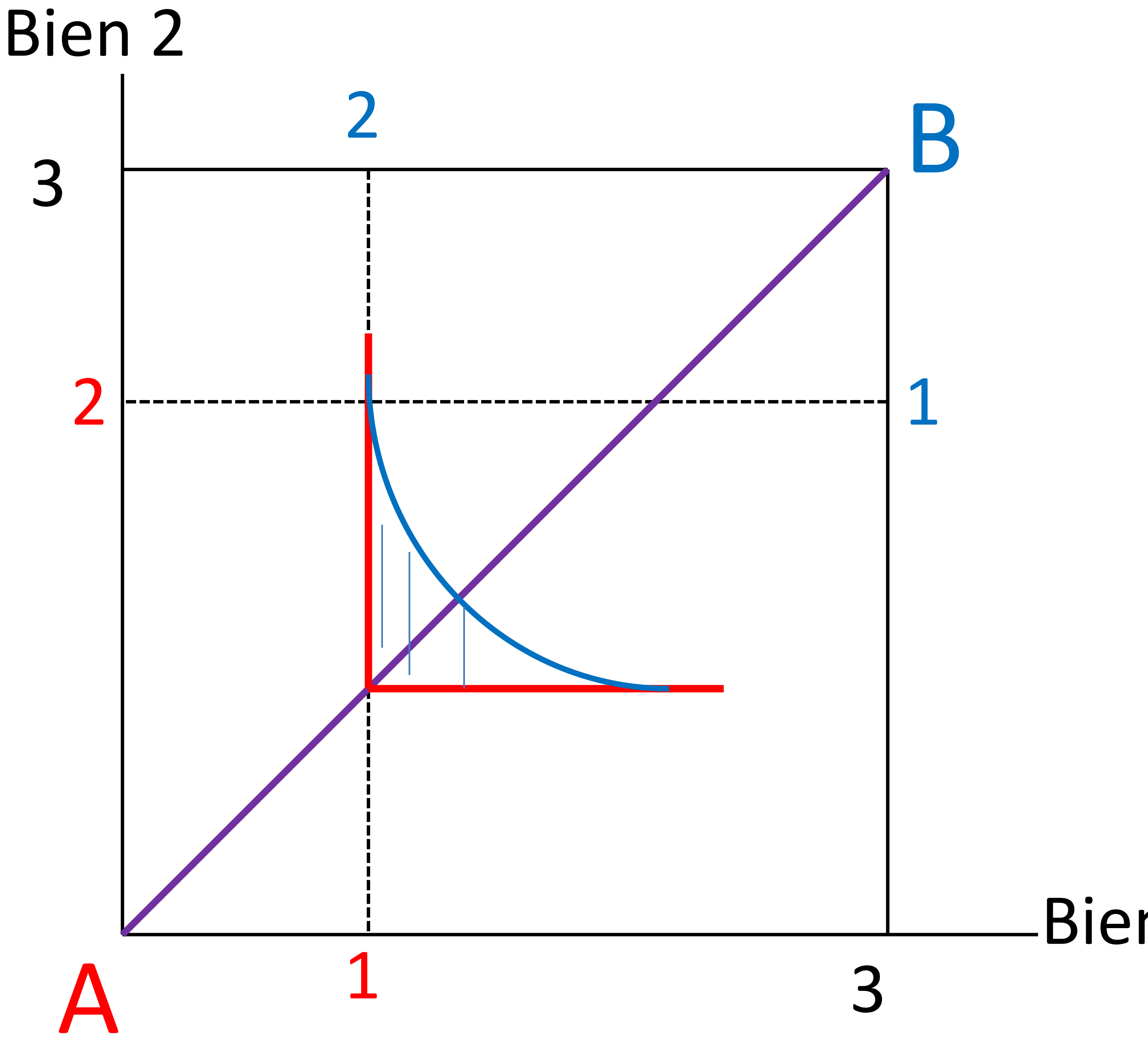
$$U^B = (x_1^B)^2 + (x_2^B)^2$$

Aísla x_2^B y obtén:

$$x_2^B = \sqrt{U^B - (x_1^B)^2}$$

Si tomas la primera y la segunda derivada con respecto x_1^B, verás que son negativas. Esto implica que la función de utilidad del agente B es cóncava.

De esta forma, si representamos ambas preferencias en una caja de Edgeworth, obtendríamos que:



Las preferencias rojas son las de A, mientras que las azules son las de B. El área marcado con rallas representa la zona de intercambio, y la línea lila es la curva de contrato. Desde el punto de la dotación, deberíamos encontrar hiperplano tangente a ambas curvas de indiferencia que represente el sistema de precios. Vemos que resulta imposible dibujar un hiperplano que sea tangente a ambas curvas, de forma que no hay un vector de precios que vacíe el mercado.
Ésto se debe a la naturaleza de las preferencias del individuo B. En particular, estas preferencias son cóncavas, rompiendo las condiciones necesarias para que se den los teoremas del bienestar.

Problema 6

a) Falso. El equilibrio parcial analiza para un único bien las funciones de oferta y de demanda exclusivamente en función de su precio, sin tener en cuenta el precio de otros bienes. Sin embargo, el equilibrio general analiza la forma en que las condiciones de demanda y de oferta de diversos mercados determinan conjuntamente los precios de muchos bienes.

b) Cierto. En una economía de intercambio puro, los individuos tienen dotaciones fijas de bienes y los intercambian entre sí, pero no hay producción.

c) Falso. Una asignación es factible si las decisiones de compraventa son compatibles con las dotaciones:

$$\boldsymbol{x_l^A + x_l^B \leq w_l^A + w_l^B}$$

Esto es, para todo bien l, la asignación es factible si la cantidad que obtienen A y B de cada bien es menor o igual a la dotación total de ese bien.

d) Cierto. La ley de Walras dice que el valor de la función de exceso de demanda es 0 en caso de monotonía. Esto tiene dos implicaciones. Una es que si hay un mercado con exceso de oferta, debe existir otro mercado con exceso de demanda. Y por lo tanto, de aquí surge la implicación que si n-1 mercados están en equilibrio, el mercado n también lo estará.

e) Cierto. El primer teorema del bienestar dice que en caso de que las funciones de utilidad sean monótonas, el equilibrio competitivo es un óptimo de pareto. Por definición, el óptimo de pareto es una situación en la que no se puede mejorar la utilidad de un agente sin empeorar la del otro.

f) Falso. Esto dependerá de las preferencias de los agentes. Piensa por ejemplo, en el caso en el que un individuo considere uno de los bienes como un “mal”, mientras que el otro lo considera un bien. En este caso, este individuo dará todo su mal al otro agente, y su origen nunca formará parte de la curva de contrato.

g) Falso. Si una asignación forma parte de un equilibrio competitivo, éste, por el primer teorema del bienestar, es un óptima de pareto, de forma que no es posible mejorar la utilidad de un agente sin empeorar la del otro. Dicho de otra manera, no existe otra asignación que mejore la utilidad de ambos agentes

h) Falso. Esto depende de las preferencias de los agentes. Sería el caso si los dos agentes tuvieran las mismas preferencias Cobb Douglas básicas. Pero podría no ser el caso, por ejemplo, si ambos agentes tienen preferencias lineales con distinta valoración de cada bien (en el que la curva de contrato serían algunos de los bordes de la caja de Edgeworth.