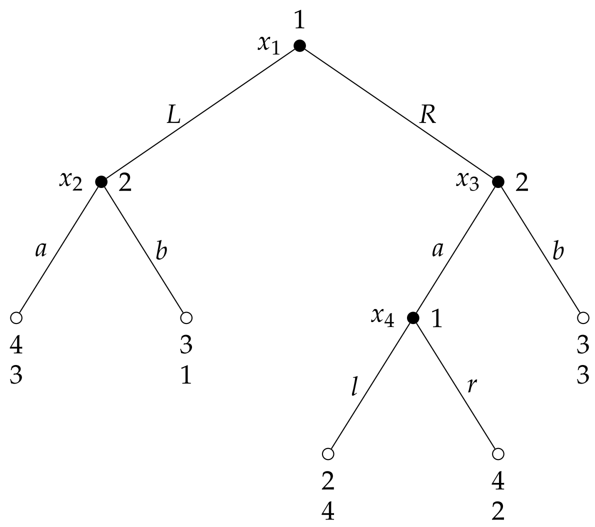
Teoría de Juegos (Código 102477)

Parcial II. Grupo 51.

Marina Bannikova. El 8 de Mayo de 2017

1.- (7 puntos) Considere el siguiente juego Γ en forma extensiva.



1.1. ¿Cuántos conjuntos de información tiene cada jugador?

1.2. ¿Cuántos subjuegos hay en el juego? (Apúntalos indicando el nodo inicial de cada subjuego).

1.3. Apunta todas estrategias para el jugador 1 y el jugador 2. ¿Cuántos perfiles de estrategias hay?

1.4. Representa la forma normal G_Γ del juego Γ.

1.5. Encuentra el conjunto S^* de equilibrios de Nash del juego G_Γ (en estrategias puras).

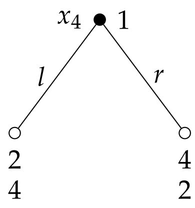
1.6. Encuentra los equilibrios perfectos de subjuegos (SPNE) del juego Γ (en estrategias puras).

1.7. ¿El juego es solucionable por dominancia? Encuentra los equilibrios sofisticados de G_Γ.

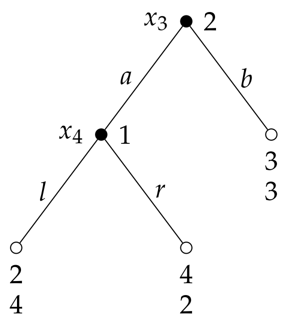
Solución.

1.1. El Jugador 1 tiene dos conjuntos de información: $b_1^1 = \{x1\}$ y $b_1^2 = \{x_4\}$. El Jugador 2 tiene dos conjuntos de información: $b_2^1 = \{x_2\}$ y $b_2^2 = \{x_3\}$.

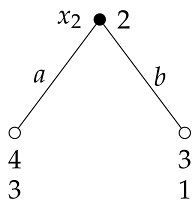
1.2. Hay 4 subjuegos. El subjuego 1 empieza en el nodo x_4 y incluye sus nodos seguidores.



El subjuego 2 empieza en el nodo x_3 y incluye su nodos seguidores y el subjuego 1.



El subjuego 3 empieza en el nodo x_2 y incluye sus nodos seguidores.



El subjuego 4 es el juego entero.

1.3. Dado que el jugador 1 actúa en 2 nodos ($X_1 = \{x_1, x_4\}$) en cada de ellos tiene 2 opciones disponibles, entonces, tiene 4 estrategias: $S_1 = \{Ll, Lr, Rl, Rr\}$.

Dado que el jugador 2 actúa en 2 nodos ($X_2 = \{x_2, x_3\}$) en cada de ellos tiene 2 opciones disponibles, entonces, tiene 4 estrategias: $S_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$.

Por tanto, hay 16 perfiles de estrategias: $S = \{(Ll, aa), (Ll, ab), (Ll, ba), (Ll, bb), (Lr, aa), (Lr, ab), (Lr, ba), (Lr, bb), (Rl, aa), (Rl, ab), (Rl, ba), (Rl, bb), (Rr, aa), (Rr, ab), (Rr, ba), (Rr, bb)\}$

1.4. El juego en forma normal G_Γ:

	aa	ab	ba	bb
Ll	4,3	4,3	3,1	3,1
Lr	4,3	4,3	3,1	3,1
Rl	2,4	3,3	2,4	3,3
Rr	4,2	3,3	4,2	3,3

1.5. Por inspección, $S^* = \{(Ll, aa), (Ll, ab), (Lr, aa), (Lr, ab), (Rr, bb)\}$.

1.6. En el subjuego 1 el NE es r, en el subjuego 2 es (b, r), en el subjuego 3 es a. Por lo tanto, el SPNE del juego entero (el subjuego 4) es (Lr, ab).

1.7. Sí, el juego es solucionable por dominancia.
Etapa 0. $S_1^0 = \{Ll, Lr, Rl, Rr\}$ $S_2^0 = \{aa, ab, ba, bb\}$
En esta etapa el juego es

	aa	ab	ba	bb
Ll	4,3	4,3	3,1	3,1
Lr	4,3	4,3	3,1	3,1
Rl	2,4	3,3	2,4	3,3
Rr	4,2	3,3	4,2	3,3

Etapa 1. Observamos en la tabla anterior que Rl es estrategia débilmente dominada para el jugador 1; aa domina ba y bb para el jugador 2.
$S_1^1 = \{Ll, Lr, Rr\}$ $S_2^2 = \{aa, ab\}$
Por lo tanto, eliminamos las estrategias dominadas. Ahora el juego es

	aa	ab
Ll	4,3	4,3
Lr	4,3	4,3
Rr	4,2	3,3

Etapa 2. Observamos que Ll y Lr dominan Rr para el jugador 1; ab domina aa para el jugador 2.
$S_1^2 = \{Ll, Lr\}$ (Ll y Lr dominan Rr) $S_2^2 = \{ab\}$ (ab domina a)
Ahora el juego es

	ab
Ll	4,3
Lr	4,3

Etapa ∞. Observamos que no hay ninguna estrategia para los dos jugadores.
$S_1^\infty = \{Ll, Lr\}$ $S_2^\infty = \{ab\}$
Por tanto obtenemos dos equilibrios: (Ll, ab) y (Lr, ab). Dado que $h_1(Ll, ab) = h_1(Lr, ab)$ y $h_2(Ll, ab) = h_2(Lr, ab)$, el juego es solucionable por dominancia, y los dos equilibrios obtenidos son equilibrios sofisticados.

2.- (7 puntos) Modificamos el juego Γ de la siguiente manera: supongamos que el jugador 2 no sabe la elección previa del jugador 1. Denotamos este juego modificado como Γ'.

2.1. El juego nuevo Γ' está representado en la figura siguiente ¿Cuántos conjuntos de información tiene cada jugador?

2.2. ¿Cuántos subjuegos hay en el juego? (Apúntalos indicando el nodo inicial de cada subjuego).

2.3. Apunta todas estrategias para el jugador 1 y el jugador 2. ¿Cuántos perfiles de estrategias hay?

2.4. Representa la forma normal $G_{\Gamma'}$ del juego Γ'.

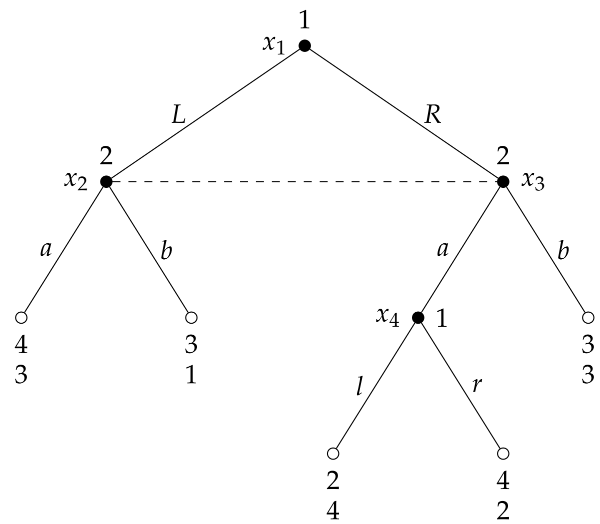
2.5. Encuentra el conjunto S^* de equilibrios de Nash del juego $G_{\Gamma'}$ (en estrategias puras).

2.6. Encuentra los equilibrios perfectos de subjuegos (SPNE) del juego Γ' (en estrategias puras).

2.7. ¿El juego es solucionable por dominancia? Encuentra los equilibrios sofisticados de $G_{\Gamma'}$.

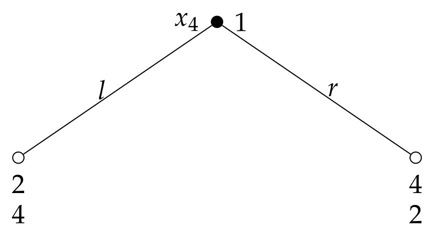
Solución.

2.1. El juego nuevo Γ' está representado en la siguiente figura.



El Jugador 1 tiene dos conjuntos de información: $b_1^1 = \{x1\}$ y $b_1^2 = \{x_4\}$. El Jugador 2 tiene un conjunto de información: $b_2^1 = \{x_2, x_3\}$.

2.2. Hay 2 subjuegos. El subjuego 1 empieza en el nodo x_4 y incluye sus nodos seguidores.



El subjuego 2 es el juego entero. Subjuego no puede empezar en el nodo x_2 o x_3 porque rompería el conjunto de información.

2.3. Dado que el jugador 1 tiene 2 conjuntos de información, cada su estrategia tiene 2 elementos: $S_1 = \{Ll, Lr, Rl, Rr\}$.

Dado que el jugador 2 tiene solo un conjunto de información, en cual tiene 2 opciones disponibles, entonces: $S_2 = \{a, b\}$.

Por tanto, hay 8 perfiles de estrategias: $S = \{(Ll, a), (Ll, b), (Lr, a), (Lr, b), (Rl, a), (Rl, b), (Rr, a), (Rr, b)\}$.

2.4. El juego en forma normal $G_{\Gamma'}$:

	a	b
Ll	4,3	3,1
Lr	4,3	3,1
Rl	2,4	3,3
Rr	4,2	3,3

2.5. Por inspección, $S^* = \{(Ll, a), (Lr, a), (Rr, b)\}$.

2.6. Dado que en el subjuego 1 el NE es r, los SPNE son (Lr, a) y (Rr, b).

2.7. El juego no es solucionable por dominancia.

Etapa 0. $S_1^0 = \{Ll, Lr, Rl, Rr\}$ $S_2^0 = \{a, b\}$

El juego es

	a	b
Ll	4,3	3,1
Lr	4,3	3,1
Rl	2,4	3,3
Rr	4,2	3,3

Etapa 1. Observamos en la tabla anterior que para el jugador 1 Ll, Lr, Rr dominan Rl; para el jugador 2 no hay estrategias dominantes.

$S_1^1 = \{Ll, Lr, Rr\}$ $S_2^1 = \{a, b\}$

Ahora el juego es

	a	b
Ll	4,3	3,1
Lr	4,3	3,1
Rr	4,2	3,3

Etapa 2. Observamos que en la tabla anterior no hay estrategias dominantes para ningún jugador.

$S_1^2 = \{Ll, Lr, Rr\} \quad S_2^2 = \{a, b\}$

Etapa ∞. No podemos eliminar ninguna estrategia más.

$S_1^\infty = \{Ll, Lr, Rr\} \quad S_2^\infty = \{a, b\}$

Después de eliminar todas estrategias dominadas sobreviven 6 equilibrios. El jugador 1 no es indifirente entre los equilibrios (recibe o 4 o 3), el jugador 2 tampoco es indiferente entre los equilibrios (recibe o 1, o 2, o 3).

3.- (6 points) El capitán Jack Sparrow con su tripulación acaban de conquistar un galeón español con un arcón de oro. El capitán Jack Sparrow decidió no compartir el oro con su tripulación, ya tiene un arcón escondido con piedras preciosas que vale mucho más que el arcón del galeón español (no es sorprendente, ya que nunca comparte lo que roban con su tripulación...).

Su tripulación puede cederle este arcón de oro o luchar contra el capitán para quitárselo. Si ceden, entonces se quedan con nada y el capitán se queda con los dos arcones. Si deciden luchar y echarlo fuera de la Perla Negra, el capitán puede combatir o ceder.

Si el Jack Sparrow decide luchar, como tiene mucha experiencia en batallas, matará la mitad de la tripulación antes que le maten a él. Por lo tanto, si combaten, será lo peor, tanto para el capitán como para los miembros de su tripulación. Si decide ceder, dejará el oro del galeón a su tripulación y se queda con su arcón con piedras preciosas.

(a) Representa la situación como un juego en forma extensiva con información perfecta (es decir, dibuja el árbol y los pagos correspondientes).

(b) Comprueba que si el capitán Jack Sparrow echa al mar el arcón de oro del galeón español en frente de su tripulación, entonces no peora su pago en el equilibrio perfecto de subjuegos y reduce el pago de su tripulación. Modifica la Figura de (a) según la situación nueva, teniendo en cuenta que los pagos también cambian.

Solución.

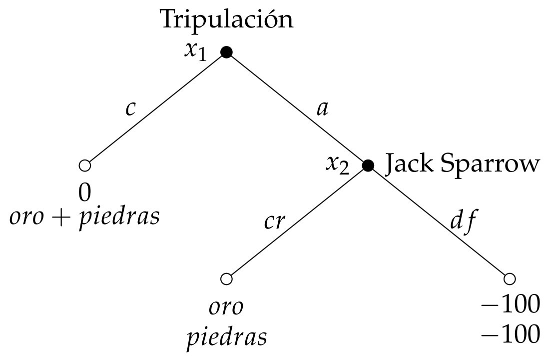
No rechazo la posibilidad de otro planteamiento de este problema. Por lo tanto, dependiendo de explicaciones y motivación de la solución propuesta se pueden considerar como correctas otras soluciones.

(a) Hay dos jugadores: la tripulación y el capitán Jack Sparrow.

Primero actúa la tripulación, en el nodo x_1. Tiene dos opciones: atacar (a) o ceder (c), formalmente, $C_{x_1} = \{a, c\}$. Si la tripulación cede, el juego se acaba, la tripulación se queda con cero y el capitán con arcón de oro y arcón de piedras preciosas (*oro* y *piedras*).

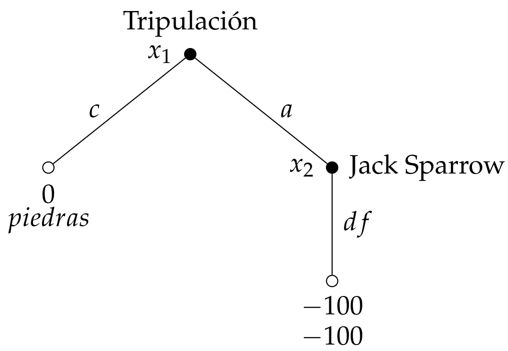
Si la tripulación ataca, el juego continua. Ahora en el nodo x_2 actúa el capitán Jack Sparrow. Él tiene dos opciones: defenderse (df) o ceder y dejar el arcón de oro a la tripulación (*cr*), formalmente $C_{x_2} = \{df, cr\}$. Si él se defiende, entonces para todos sufren todos, sea pagos en este caso -100 y -100 para los dos jugadores. Si él cede, entonces, la tripulación se queda con el arcón de oro (*oro*), y el capitán con su arcón con piedras, *piedras* (acordamos que la tripulación no sabe que el capitán tiene este arcón).

El juego en forma extensiva está representado en la siguiente figura.



Hay dos subjuegos. En el subjuego 1 que empieza en x_2 el capitán prefiere ceder (*cr*). En el subjuego 2 (el juego entero) la tripulación prefiere atacar (*a*). Por lo tanto, SPNE es (a, cr).

(b) Ahora consideramos la situación que el capitán tira al mar el arcón con oro. Entonces, en el nodo x_2 el capitán ya no tiene opción de ceder y dejar el oro a su tripulación. Por lo tanto el juego ahora tiene la siguiente forma (pagamos atención que los pagos cambian, dado que el oro esta en el mar...):



De esta manera el capitán Jack Sparrow obliga a la tripulación eligir a ceder (siendo racionales). Ahora el único SPNE es (c, df) genera pago igual que antes para el capitán (*piedras*), pero sí que se peora el pago de la tripulación: antes tenían oro, ahora no obtienen nada.