Teoría de Juegos (Código 102477)

Examen Final.

Marina Bannikova (Grupo **1**).

Quiz #1. 09.03.2018

Soluciones.

La solución depende del valor de la ω (el ultimo número del NIU, si es 0, entonces $\omega = 10$).

La solución del ejercicio 2 por razones evidentes no se presenta.

1. El jugador 3 elige entre las matrices ($S_3 = \{X, Y\}$), el jugador 1 elige entre las filas ($S_1 = \{T, M\}$), el jugador 2 elige entre las columnas ($S_2 = \{L, R\}$).

X

	L	R
T	$7, 3, \omega$	$8, 2, 4$
M	$7, 2, 0$	$7, 4, 4$

Y

	L	R
T	$6, 1, 5$	$4, 0, 2$
M	$6, 2, 2$	$5, 4, 3$

.

- Cuantos perfiles de estrategias hay en este juego? __________
- En la tabla marca las mejores respuestas para cada jugador;
- Encuentra el conjunto de equilibrios de Nash: $S^* = \{$____________________________$\}$.

Solución.

Cada perfil de estrategias es una combinación de tres estrategias (estrategia del jugador 1, del jugador 2, del jugador 3). Dado que cada uno de los tres jugadores tienen dos estrategias disponibles, se puede crear 8 perfiles de estrategias: $\#S = 2 * 2 * 2 = 8$.

Dependiendo de ω tenemos tres casos:

- caso 1. Si $\omega < 5$.
- caso 2. Si $\omega = 5$.
- caso 3. Si $\omega > 5$.

Caso 1. Si $\omega < 5$.

Las mejores respuestas están marcados en negrita en la siguiente tabla:

X

	L	R
T	$\mathbf{7}, \mathbf{3}, \omega < 5$	$\mathbf{8}, 2, \mathbf{4}$
M	$\mathbf{7}, 2, 0$	$7, \mathbf{4}, \mathbf{4}$

Y

	L	R
T	$\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{5}$	$4, 0, 2$
M	$\mathbf{6}, 2, \mathbf{2}$	$\mathbf{5}, \mathbf{4}, 3$

.

La explicación detallada:

Consideramos el jugador 1. Su problema es: dado las estrategias de los otros jugadores, elegir tal $s_1 \in T, M$ que le maximiza sus pagos.

- si los demás juegan (L, X) (es decir, el jugador 2 elige L y el jugador 3 elige X), el jugador 1 puede obtener 7 jugando T o 7 jugando M. Dado que él es indiferente entre estas dos estrategias, las dos son las mejores respuestas a (L, X): $MR_1(L, X) = T, M$.
- si los demás juegan (R, X) (es decir, el jugador 2 elige R y el jugador 3 elige X), el jugador 1 puede obtener 8 jugando T o 7 jugando M. Por lo tanto, su mejor respuesta a (R, X) es jugar T: $MR_1(R, X) = T$.
- si los demás juegan (L, Y) (es decir, el jugador 2 elige L y el jugador 3 elige Y), el jugador 1 puede obtener 6 jugando T o 6 jugando M. Dado que él es indiferente entre estas dos estrategias, las dos son las mejores respuestas a (L, Y): $MR_1(L, Y) = T, M$.
- si los demás juegan (R, Y) (es decir, el jugador 2 elige R y el jugador 3 elige Y), el jugador 1 puede obtener 4 jugando T o 5 jugando M. Por lo tanto, su mejor respuesta a (R, Y) es jugar M: $MR_1(R, Y) = M$.

Consideramos el jugador 2. Su problema es: dado las estrategias de los otros jugadores, elegir tal $s_2 \in L, R$ que le maximiza sus pagos.

- si los demás juegan (T, X) (es decir, el jugador 1 elige T y el jugador 3 elige X), el jugador 2 puede obtener 3 jugando L o 2 jugando R. Por lo tanto, su mejor respuesta a (T, X) es jugar L: $MR_2(T, X) = L$.
- si los demás juegan (M, X) (es decir, el jugador 1 elige M y el jugador 3 elige X), el jugador 2 puede obtener 2 jugando L o 4 jugando R. Por lo tanto, su mejor respuesta a (M, X) es jugar R: $MR_2(M, X) = R$.
- si los demás juegan (T, Y) (es decir, el jugador 1 elige T y el jugador 3 elige Y), el jugador 2 puede obtener 1 jugando L o 0 jugando R. Por lo tanto, su mejor respuesta a (T, Y) es jugar L: $MR_2(T, Y) = L$.
- si los demás juegan (M, Y) (es decir, el jugador 1 elige M y el jugador 3 elige Y), el jugador 2 puede obtener 2 jugando L o 4 jugando R. Por lo tanto, su mejor respuesta a (M, Y) es jugar R: $MR_2(M, Y) = R$.

Consideramos el jugador 3. Su problema es: dado las estrategias de los otros jugadores, elegir tal $s_3 \in X, Y$ que le maximiza sus pagos.

- si los demás juegan (T, L) (es decir, el jugador 1 elige T y el jugador 2 elige L), el jugador 3 puede obtener $\omega < 5$ jugando X o 5 jugando Y. Por lo tanto, su mejor respuesta a (T, L) es jugar Y: $MR_3(T, L) = Y$.

- si los demás juegan (T, R) (es decir, el jugador 1 elige T y el jugador 2 elige R), el jugador 3 puede obtener 4 jugando X o 2 jugando Y. Por lo tanto, su mejor respuesta a (T, R) es jugar X: $MR_3(T, R) = X$.
- si los demás juegan (M, L) (es decir, el jugador 1 elige M y el jugador 2 elige L), el jugador 3 puede obtener 0 jugando X o 2 jugando Y. Por lo tanto, su mejor respuesta a (M, L) es jugar Y: $MR_3(M, L) = Y$.
- si los demás juegan (M, R) (es decir, el jugador 1 elige M y el jugador 2 elige R), el jugador 3 puede obtener 4 jugando X o 3 jugando Y. Por lo tanto, su mejor respuesta a (M, R) es jugar X: $MR_3(M, R) = X$.

Por lo tanto, observamos que existe un único equilibrio de Nash, $S^* = \{(T, L, Y)\}$. *Prestamos atención que un equilibrio de Nash es un* ***perfil de estrategias*** *y no los pagos de un perfil de estrategias. Por lo tanto la respuesta* $S^* = \{(6, 1, 5)\}$ *no será correcta.*

Caso 2. Si $\omega = 5$.

El parámetro ω solo afecta a las mejores respuestas del jugador 3, porque solo aparece en los pagos del jugador 3. Dado que los demás juegan (T, L), el jugador 3 puede obtener o $\omega = 5$ jugando X o 5 jugando Y. Dado que él es indiferente entre estos dos pagos, su mejor respuesta a (T, L) es jugar o X o Y: $MR_3(T, L) = X, Y$.

Para saber como buscar las mejores equilibrios de los jugadores 1 y 2, mira el caso 1.

Observamos las mejores respuestas en este caso:

X

	L	R
T	$\mathbf{7}, \mathbf{3}, \omega = \mathbf{5}$	$\mathbf{8}, 2, \mathbf{4}$
M	$\mathbf{7}, 2, 0$	$7, \mathbf{4}, \mathbf{4}$

Y

	L	R
T	$\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{5}$	$4, 0, 2$
M	$\mathbf{6}, 2, \mathbf{2}$	$\mathbf{5}, \mathbf{4}, 3$

Por lo tanto, observamos que existen dos equilibrios de Nash, $S^* = \{(T, L, X), (T, L, Y)\}$. *Prestamos atención que un equilibrio de Nash es un* ***perfil de estrategias*** *y no los pagos de un perfil de estrategias. Por lo tanto la respuesta* $S^* = \{(7, 3, 5), (6, 1, 5)\}$ *no será correcta.*

Caso 3. Si $\omega > 5$.

El parámetro ω solo afecta a las mejores respuestas del jugador 3, porque solo aparece en los pagos del jugador 3. Dado que los demás juegan (T, L), el jugador 3 puede obtener o $\omega > 5$ jugando X o 5 jugando Y. Por lo tanto, su mejor respuesta a (T, L) es jugar o X: $MR_3(T, L) = X$.

Para saber como buscar las mejores equilibrios de los jugadores 1 y 2, mira el caso 1.

Observamos las mejores respuestas en este caso:

X

	L	R
T	$\mathbf{7}, \mathbf{3}, \omega > \mathbf{5}$	$\mathbf{8}, 2, \mathbf{4}$
M	$\mathbf{7}, 2, 0$	$7, \mathbf{4}, \mathbf{4}$

Y

	L	R
T	$\mathbf{6}, \mathbf{1}, 5$	$4, 0, 2$
M	$\mathbf{6}, 2, \mathbf{2}$	$\mathbf{5}, \mathbf{4}, 3$

Por lo tanto, observamos que existe un único equilibrio de Nash, $S^* = \{(T, L, X)\}$. *Prestamos atención que un equilibrio de Nash es un* ***perfil de estrategias*** *y no los pagos de un perfil de estrategias. Por lo tanto la respuesta $S^* = \{(7, 3, 5)\}$ no será correcta.*

2. Rellena la matriz de pagos para los dos jugadores:

- Si $\omega \in \{0, 1, 10\}$, que no haya ningún equilibrio de Nash, $S* = \{\emptyset\}$;
- Si $\omega \in \{2, 3\}$, que el unico equilibrio de Nash sea $S* = \{(T, L)\}$;
- Si $\omega \in \{4, 5\}$, que el unico equilibrio de Nash sea $S* = \{(T, R)\}$;
- Si $\omega \in \{6, 7\}$, que el único equilibrio de Nash sea $S* = \{(B, L)\}$;
- Si $\omega \in \{8, 9\}$, que hayan dos equilibrios de Nash: $S* = \{(T, L), (B, R)\}$.

Jugador 2

		L	R
Jugador 1	T		
	B		

Por razones evidentes no se puede presentar una solución general. Varios ejemplos de los equilibrios de Nash se pueden encontrar en el fichero "Ejemplos de equilibrios de Nash" o en las transparencias de los temas 1 y 2.

3. Encuentra el conjunto de equilibrios de Nash del juego en forma normal donde $I = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0, 10]$ y las dos funciones de pagos son: para cada $(s_1, s_2) \in [0, 1]^2$,

$$\begin{aligned} h_1(s_1, s_2) &= 10s_1 - \tfrac{1}{2}s_1^2 - \omega s_1 s_2 \\ h_2(s_1, s_2) &= 10s_2 - \tfrac{1}{2}s_2^2 - \omega s_1 s_2. \end{aligned}$$

Solución.
3.1. Define el problema de cada jugador:

El problema del jugador 1 es: dado s_2, elegir tal s_1 que $max\{10s_1 - \frac{1}{2}s_1^2 - \omega s_1 s_2\}$.
El problema del jugador 2 es: dado s_1, elegir tal s_2 que $max\{10s_1 - \frac{1}{2}s_1^2 - \omega s_1 s_2\}$.

O, en general, para un jugador $i \in I$:
El problema del jugador i es: dado s_{-i}, elegir tal s_i que $max\{10s_i - \frac{1}{2}s_i^2 - \omega s_i s_{-i}\}$.

3.2. Define las funciones de las mejores respuestas de los jugadores:

La función de las mejores respuestas para cada jugador es la solución de su problema de 3.1.

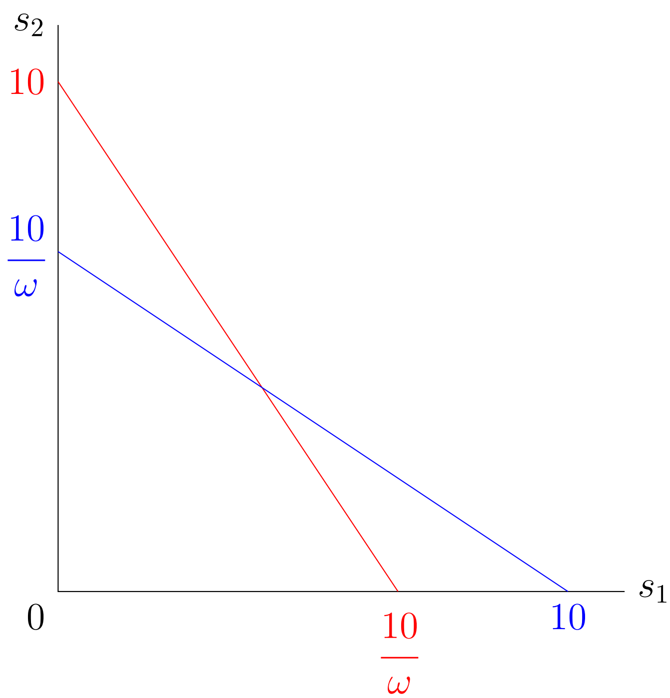
Jugador 1:
CPO: $\dfrac{dh_1(s_1, s_2)}{ds_1} = 10 - \frac{1}{2}2s_1 - \omega s_2 = 0$
CSO: $\dfrac{d^2h_1(s_1, s_2)}{ds_1} = -1 < 0$ por lo tanto, es cóncava y encontramos un máximo:
$MR_1(s_2) = s_1^* = 10 - \omega s_2$

Jugador 2:
CPO: $\dfrac{dh_2(s_1, s_2)}{ds_2} = 10 - \frac{1}{2}2s_2 - \omega s_1 = 0$
CSO: $\dfrac{d^2h_2(s_1, s_2)}{ds_2} = -1 < 0$ por lo tanto, es cóncava y encontramos un máximo:
$MR_2(s_1) = s_2^* = 10 - \omega s_1$

O, en general, para un jugador $i \in I$:
CPO: $\dfrac{dh_i(s_1, s_2)}{ds_i} = 10 - \frac{1}{2}2s_i - \omega s_{-i} = 0$
CSO: $\dfrac{d^2h_i(s_1, s_2)}{ds_i} = -1 < 0$ por lo tanto, es cóncava y encontramos un máximo:
$MR_i(s_{-i}) = s_i^* = 10 - \omega s_{-i}$

3.3. Gráficamente representa las mejores respuestas (eje vertical representa las estrategias del jugador 2, s_2; eje horizontal representa las estrategias del jugador 1, s_1):

La función de las mejores respuestas del jugador 1 está en rojo, mientras la función de las mejores respuestas del jugador 2 está en azul:



La intersección de las dos funciones nos da el equilibrio de Nash.

3.4. Encuentra el conjunto de equilibrios de Nash, indícalo en el gráfico 3.4.

Para obtener el equilibrio de Nash tenemos que resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incognitas:

$$\begin{cases} MR_1(s_2) = s_1^* = 10 - \omega s_2^* \\ MR_2(s_1) = s_2^* = 10 - \omega s_1^* \end{cases}$$

Como lo resolvemos? - Substituyendo s_2^* de la segunda función en la primera función:

$s_1^* = 10 - \omega(10 - \omega s_1^*)$
$s_1^* = 10 - 10\omega - \omega^2 s_1^*$
$s_1^*(1 - \omega^2) = 10 - 10\omega$
$s_1^* = \dfrac{10 - 10\omega}{1 - \omega^2} = \dfrac{10(1 - \omega)}{(1 - \omega)(1 + \omega)} = \dfrac{10}{1 + \omega}$

La solución es simétrica: $s_2^* = \dfrac{10}{1 + \omega}$. Por lo tanto, el único equilibrio de Nash es $S^* = \left\{ \left(\frac{10}{1+\omega}, \frac{10}{1+\omega} \right) \right\}$

Las respuestas numéricas:

ω	S^*
1	(0,0)
2	(3.33,3.33)
3	(2.5,2.5)
4	(2,2)
5	(1.67,1.67)
6	(1.43,1.43)
7	(1.25,1.25)
8	(1.11,1.11)
9	(1,1)
10 (0)	(0.9,0.9)