Teoría de Juegos (Código 102477)

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). Marina Bannikova

Lista de Ejercicios #1

1.1.- Sean $G = \left(I, (S_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I}\right)$ y $G' = \left(I, (S_i)_{i\in I}, (h'_i)_{i\in I}\right)$ dos juegos en forma normal donde para cada $i \in I$, $h'_i = \alpha_i + \beta_i h_i$ y $\beta_i > 0$. Demuestre que el conjunto de los equilibrios de Nash de G y GG' coinciden; es decir, las transformaciones afines positivas de las funciones de pagos no cambian el conjunto de equilibrios de Nash. Evalúe la importancia de este resultado.

1.2.- Encuentre el conjunto de equilibrio de Nash S^* del siguiente juego en forma normal:

	L	C	R
T	$2,0$	$1,1$	$4,2$
M	$3,4$	$1,2$	$2,3$
B	$1,3$	$0,2$	$3,0$

1.3.- Encuentre el conjunto de equilibrios de Nash S^* del siguiente juego en forma normal:

	L	C	R
T	$2,3$	$4,5$	$1,-1$
M	$1,4$	$2,3$	$2,5$
B	$1,0$	$0,1$	$3,3$

1.4.- Encuentre el conjunto de equilibrio de Nash S^* del siguiente juego en forma normal:

	L	C	R
T	$4,4$	$3,4$	$2,2$
M	$5,1$	$3,1$	$0,1$
B	$3,0$	$2,1$	$2,1$

1.5.- Sea $G^k = (I, S, h^k)$ el juego en forma normal donde $I = \{1,2,3\}, S_1 = \{T, B\}$, $S_2 = \{L, R\}$, $S_3 = \{A, B\}$ y para cada $k = 1,2,3$ la funcion de pago h^k está dada en las tablas siguientes correspondiente a cada k. Para cada $k = 1,2,3$, encuentre el conjunto de equilibrios de Nash en estrategias (puras).

(a) $k = 1$

	A			B	
	L	R		L	R
T	$2,2,0$	$0,0,0$	T	$1,1,0$	$0,0,0$
B	$0,0,0$	$1,1,1$	B	$0,0,0$	$2,2,0$

(b) $k = 2$

A			B		
	L	R		L	R
T	$1,1,1$	$0,0,0$	T	$0,0,0$	$0,0,0$
B	$0,0,0$	$0,0,0$	B	$0,0,0$	$2,2,2$

(c) $k = 3$

A			B		
	L	R		L	R
T	$0,1,-1$	$0,0,0$	T	$3,3,-6$	$0,2,0$
B	$1,0,0$	$4,4,-8$	B	$0,2,0$	$1,1,-2$

1.6.- Los jugadores 1 y 2 están negociando cómo dividir un Euro. Ambos jugadores nombran simultáneamente las porciones que les gustaría tener, $s_1 \in \mathbb{R}_+$ y $s_2 \in \mathbb{R}_+$, donde $0 \leq s_1 \leq 1$ y $0 \leq s_2 \leq 1$. Si $s_1 + s_2 \leq 1$, entonces, los jugadores reciben las porciones que han nombrado; si $s_1 + s_2 > 1$, entonces los ambos jugadores reciben cero. ¿Cuál es el conjunto de equilibrios de Nash S^* de este juego?

1.7.- Dos jugadores tienen 10 euros para dividirse entre ellos. Para ello, utilizan el siguiente procedimiento: cada jugador nombra un número de euros (un entero no negativo), como máximo igual a 10. Si la suma de los dos números es como máximo 10, cada jugador recibe la cantidad de dinero (y el resto es destruido). Si la suma de los dos números excede 10 y los dos números son diferentes entonces el jugador que nombra el número más pequeño recibe esa cantidad y el otro jugador recibe el dinero restante. Si la suma de los dos números supera 10 y los dos números son iguales cada jugador recibe 5 euros. Determine la mejor respuesta de cada jugador, enseña en un diagrama y encuentre los equilibrios de Nash del juego.

1.8.- Dos agentes participan en un proyecto conjunto. Si cada agente i pone un nivel de esfuerzo x_i, un número no negativo igual a como máximo 1, que le costó $c(x_i)$, el resultado del proyecto vale $f(x_1, x_2)$. El valor del proyecto se divide a partes iguales entre los dos agentes, independientemente de sus niveles de esfuerzo. Formule la situación como un juego de forma normal. Encuentre el equilibrio de Nash del juego cuando:

(a) $f(x_1, x_2) = 3x_1x_2$ y $c(x_i) = x_i^2$ para $i = 1, 2$.

(b) $f(x_1, x_2) = 4x_1x_2$ y $c(x_i) = x_i$ para $i = 1, 2$.

En cada caso, ¿hay un par de niveles de esfuerzo que rinde a ambos agentes mayores pagos que cada uno de los niveles de esfuerzo de equilibrio?

1.9.- Considerando el juego en forma normal $G = (I, S, h)$ donde $I = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0, 100]$ y

$$\begin{aligned} h_1(s_1, s_2) &= 25s_1 - 4s_1^2 + 15s_1s_2 \\ h_2(s_1, s_2) &= 100s_2 - 50s_1 - s_2^2 - s_1s_2. \end{aligned}$$

Encuentre los equilibrios de Nash de este juego y represéntelos usando las correspondientes mejores respuestas.

1.10.- Supongamos que existen n empresas en el modelo de oligopolio de Cournot. Sea y_i la cantidad producida por una empresa i, y sea $Y = y_1 + \cdots + y_n$ la cantidad agregada en el mercado. Sea P el precio de equilibrio de mercado y supongamos que la demanda inversa viene dada por $P(Y) = \text{máx}\{a - bY, 0\}$, donde $b > 0$. Supongamos que para la empresa i el coste total de producir la cantidad y_i es $C_i(y_i) = cy_i$. Es decir, no hay costes fijos y el coste marginal es constante e igual a c, donde suponemos que $c < a$. Siguiendo a Cournot, supongamos que las empresas eligen sus volúmenes de producción simultáneamente. ¿qué ocurre cuando n tiende a infinito?

1.11.- Considérese el modelo de duopolio de Cournot en el que la demanda inversa es

$$P(Y) = \begin{cases} a - Y & \text{si } 0 \leq Y \leq a \\ 0 & \text{si } a < Y, \end{cases}$$

y_i es la producción de la empresa i y $Y = y_1 + y_2$, pero las empresas tienen costes marginales asimétricos, c_1 para la empresa 1 y c_2 para la empresa 2. ¿Cuál es el equilibrio de Nash si $0 < c_i < \frac{a}{2}$ para cada empresa $i = 1, 2$? ¿Qué ocurre si $c_1 < c_2 < a$ pero $2c_2 > a + c_1$?

1.12.- (1.7 en Gibbons) Consideramos el modelo de duopolio de Bertrand con productos heterogéneos; es decir, supongamos que la cantidad que los consumidores demandan de las empresas $i = 1, 2$ es, para cada vector (p_1, p_2),

$$D_i(p_1, p_2) = \begin{cases} a - p_i + bp_{3-i} & \text{si } a \geq p_i - bp_{3-i} \\ 0 & \text{si } a < p_i - bp_{3-i}. \end{cases}$$

Supongamos que no hay costes fijos y que los costes marginales son constantes e iguales a c, donde $c < a$ y $b < 2$. Demuéstrese el vector de precios (p_1^*, p_2^*) que representa el equilibrio de Nash del juego en forma normal correspondiente .

1.13.- Consideramos el modelo de duopolio de Bertrand con productos homogéneos; es decir, supongamos que la cantidad que demandan los consumidores a la empresa $i = 1, 2$ para cada vector (p_1, p_2), es

$$D_i(p_1, p_2) = \begin{cases} a - p_i & \text{si } p_i < p_j \\ \frac{a - p_i}{2} & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j. \end{cases}$$

Supongamos también que no hay costes fijos y que los costes marginales son constantes e iguales a c, donde $c < a$. Demuéstrese que si las empresas eligen precios simultáneamente, el único equilibrio de Nash consiste en que ambas empresas fijen el precio$c$.

1.14.- Considérese una población votante uniformemente distribuida en el espectro ideológico que va de la izquierda ($x = 0$) a la derecha ($x = 1$). Cada uno de los candidatos para un único puesto elige simultáneamente un programa electoral (es decir, un punto en la línea entre $x = 0$ y $x = 1$). Los votantes observan el programa de los candidatos y luego cada votante vota por el candidato cuyo programa se acerque más a su posición en el espectro. Si, por ejemplo, hay dos candidatos y eligen programas $x_1 = 0{,}3$ y $x_2 = 0{,}6$, todos los votantes a la izquierda de $x = 0{,}45$ votan al candidato 1, y todos los que están a la derecha votan al candidato 2, y el candidato 2 gana la elección con un 55 por ciento de los votos. Supongamos que a los candidatos sólo les importa ser eligidos; en realidad, su programa no les interesa para nada. Si hay dos candidatos, ¿cuál es el equilibrio de Nash con estrategias puras? Si hay tres candidatos, indíquese un equilibrio de Nash con estrategias puras. (Supongamos que cuando varios candidatos eligen el mismo programa, los votos obtenidos por ese programa se dividen a partes iguales, y que los empates entre los que consiguen más votos se resuelvan a cara o cruz.)