Teoría de Juegos (Código : 102477)

Juegos Cooperativos

Antonio Miralles

antonio.miralles@uab.cat

despacho B3-196

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

5.1.- Preliminares

- von Neumann and Morgenstern (1944) estudiaron juegos no cooperativos con dos jugadores.

5.1.- Preliminares

- von Neumann and Morgenstern (1944) estudiaron juegos no cooperativos con dos jugadores.
- Ellos realizaron que para estudiar el caso general tendrían que considerar el papel de las coaliciones de los jugadores.

5.1.- Preliminares

- von Neumann and Morgenstern (1944) estudiaron juegos no cooperativos con dos jugadores.
- Ellos realizaron que para estudiar el caso general tendrían que considerar el papel de las coaliciones de los jugadores.
- Por ejemplo, ¿Qué sucede si dos jugadores se ponen de acuerdo y juegan contra el tercer jugador?

5.1.- Preliminares

- von Neumann and Morgenstern (1944) estudiaron juegos no cooperativos con dos jugadores.
- Ellos realizaron que para estudiar el caso general tendrían que considerar el papel de las coaliciones de los jugadores.
- Por ejemplo, ¿Qué sucede si dos jugadores se ponen de acuerdo y juegan contra el tercer jugador?
- Dado que este tipo de consideraciones hace el análisis demasiado complejo, ellos han propuesto y han estudiado una forma reducida del modelo: juegos cooperativos con utilidad transferible.

5.1.- Preliminares

- von Neumann and Morgenstern (1944) estudiaron juegos no cooperativos con dos jugadores.
- Ellos realizaron que para estudiar el caso general tendrían que considerar el papel de las coaliciones de los jugadores.
- Por ejemplo, ¿Qué sucede si dos jugadores se ponen de acuerdo y juegan contra el tercer jugador?
- Dado que este tipo de consideraciones hace el análisis demasiado complejo, ellos han propuesto y han estudiado una forma reducida del modelo: juegos cooperativos con utilidad transferible.
- Dos hipótesis:

5.1.- Preliminares

- von Neumann and Morgenstern (1944) estudiaron juegos no cooperativos con dos jugadores.
- Ellos realizaron que para estudiar el caso general tendrían que considerar el papel de las coaliciones de los jugadores.
- Por ejemplo, ¿Qué sucede si dos jugadores se ponen de acuerdo y juegan contra el tercer jugador?
- Dado que este tipo de consideraciones hace el análisis demasiado complejo, ellos han propuesto y han estudiado una forma reducida del modelo: juegos cooperativos con utilidad transferible.
- Dos hipótesis:
  - Cualquier subconjunto de jugadores tiene herramientas para conseguir acuerdos ejecutables entre ellos.

5.1.- Preliminares

- von Neumann and Morgenstern (1944) estudiaron juegos no cooperativos con dos jugadores.
- Ellos realizaron que para estudiar el caso general tendrían que considerar el papel de las coaliciones de los jugadores.
- Por ejemplo, ¿Qué sucede si dos jugadores se ponen de acuerdo y juegan contra el tercer jugador?
- Dado que este tipo de consideraciones hace el análisis demasiado complejo, ellos han propuesto y han estudiado una forma reducida del modelo: juegos cooperativos con utilidad transferible.
- Dos hipótesis:
  - Cualquier subconjunto de jugadores tiene herramientas para conseguir acuerdos ejecutables entre ellos.
  - Los pagos entre ellos son factibles; es decir, hay un bien (utilidad o dinero) que se puede pasar de un jugador a otro. Así, nos podemos referir a la cantidad total (de utilidad) que una coalición puede garantizar a su misma.

5.1.- Preliminares

- Un *juego cooperativo con utilidad transferible* (juego TU o un juego con pagos) es un par (N, v) (o solamente v si el conjunto N está claro del contexto) donde

5.1.- Preliminares

- Un *juego cooperativo con utilidad transferible* (juego TU o un juego con pagos) es un par (N, v) (o solamente v si el conjunto N está claro del contexto) donde
  - $N = \{1, ..., n\}$ es el conjunto de *jugadores*.

5.1.- Preliminares

- Un *juego cooperativo con utilidad transferible* (juego TU o un juego con pagos) es un par (N, v) (o solamente v si el conjunto N está claro del contexto) donde
  - $N = \{1, ..., n\}$ es el conjunto de *jugadores*.
    - Denotamos como 2^N la familia de todos subconjuntos de N, incluyendo el conjunto vacío; por ejemplo, si $N = \{1, 2, 3\}$,

      $$2^N = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

      Dado que $|N| = n$, $\left|2^N\right| = 2^n$.

5.1.- Preliminares

- Un *juego cooperativo con utilidad transferible* (juego TU o un juego con pagos) es un par (N, v) (o solamente v si el conjunto N está claro del contexto) donde
  - $N = \{1, ..., n\}$ es el conjunto de *jugadores*.
    - Denotamos como 2^N la familia de todos subconjuntos de N, incluyendo el conjunto vacío; por ejemplo, si $N = \{1, 2, 3\}$,

      $$2^N = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

      Dado que $|N| = n$, $\left|2^N\right| = 2^n$.
  - $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es la *función característica* del juego que asocia a cada coalición $S \in 2^N$ un número real $v(S)$, que se interpreta como la utilidad total que la coalición S puede obtener por sus propios esfuerzos. Por convención, establecemos $v(\{\emptyset\}) = 0$.

5.1.- Preliminares

- Un *juego cooperativo con utilidad transferible* (juego TU o un juego con pagos) es un par (N, v) (o solamente v si el conjunto N está claro del contexto) donde
  - $N = \{1, ..., n\}$ es el conjunto de *jugadores*.
    - Denotamos como 2^N la familia de todos subconjuntos de N, incluyendo el conjunto vacío; por ejemplo, si $N = \{1, 2, 3\}$,

      $$2^N = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

      Dado que $|N| = n$, $\left|2^N\right| = 2^n$.
  - $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es la *función característica* del juego que asocia a cada coalición $S \in 2^N$ un número real $v(S)$, que se interpreta como la utilidad total que la coalición S puede obtener por sus propios esfuerzos. Por convención, establecemos $v(\{\emptyset\}) = 0$.
  - Hay varias justificaciones de esta función v.

5.1.- Preliminares

Definiciones Decimos que el juego cooperativo (N, v) es

- *Esencial* si $v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$.

5.1.- Preliminares

Definiciones Decimos que el juego cooperativo (N, v) es

- *Esencial* si $v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$.
  - Cooperación tiene sentido únicamente en juegos esenciales.

5.1.- Preliminares

Definiciones Decimos que el juego cooperativo (N, v) es

- *Esencial* si $v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$.
  - Cooperación tiene sentido únicamente en juegos esenciales.
  - Ejemplo 1: $N = \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 2 \\ v(\{2\}) &= 2 \\ v(\{1,2\}) &= 1 \end{aligned}$$

    no es esencial.

5.1.- Preliminares

Definiciones Decimos que el juego cooperativo (N, v) es

- *Esencial* si $v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$.
  - Cooperación tiene sentido únicamente en juegos esenciales.
  - Ejemplo 1: $N = \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 2 \\ v(\{2\}) &= 2 \\ v(\{1,2\}) &= 1 \end{aligned}$$

    no es esencial.
  - Ejemplo 2: $N = \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 2 \\ v(\{2\}) &= 2 \\ v(\{1,2\}) &= 5 \end{aligned}$$

    es esencial.

5.1.- Preliminares

- *Monótono* si para cada $S \subset T \subseteq N$, $v(S) \leq v(T)$.

5.1.- Preliminares

- *Monótono* si para cada $S \subset T \subseteq N$, $v(S) \leq v(T)$.
  - Añadiendo jugadores a la coalición no puede reducir la valor de esta coalición.

5.1.- Preliminares

- *Monótono* si para cada $S \subset T \subseteq N$, $v(S) \leq v(T)$.
  - Añadiendo jugadores a la coalición no puede reducir la valor de esta coalición.
  - Ejemplo 1: $N = \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) &= v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 2 \\ v(\{1,2,3\}) &= 1 \end{aligned}$$

    no es monótono.

5.1.- Preliminares

- *Monótono* si para cada $S \subset T \subseteq N$, $v(S) \leq v(T)$.
  - Añadiendo jugadores a la coalición no puede reducir la valor de esta coalición.
  - Ejemplo 1: $N = \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) &= v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 2 \\ v(\{1,2,3\}) &= 1 \end{aligned}$$

    no es monótono.
  - Ejemplo 2: $N = \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) &= v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 2 \\ v(\{1,2,3\}) &= 3 \end{aligned}$$

    es monótono.

5.1.- Preliminares

- *Superaditivo* si para cada $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \varnothing$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

5.1.- Preliminares

- *Superaditivo* si para cada $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \varnothing$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.
  - Cooperación es siempre mejor.

5.1.- Preliminares

- *Superaditivo* si para cada $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \varnothing$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.
  - Cooperación es siempre mejor.
  - Salvo que digamos lo contrario, vamos asumir que el juego es superaditivo, y por tanto, es también esencial.

5.1.- Preliminares

- *Superaditivo* si para cada $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \varnothing$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.
  - Cooperación es siempre mejor.
  - Salvo que digamos lo contrario, vamos asumir que el juego es superaditivo, y por tanto, es también esencial.
  - Ejemplo 1: $N = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1{,}5 \\ v(\{1,2\}) &= v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 2 \\ v(\{1,2,3\}) &= 3 \end{aligned}$$

no es superaditivo dado que

$$v(\{1\}) + v(\{2,3\}) = 3{,}5 > 3 = v(\{1,2,3\})$$

y

$$\{1\} \cap \{2,3\} = \varnothing.$$

5.1.- Preliminares

- *Superaditivo*

- *Superaditivo*
  - Ejemplo 2: $N = \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) &= v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 2 \\ v(\{1,2,3\}) &= 3 \end{aligned}$$

es superaditivo dado que para todos distintos $i, j \in N$,

$$v(\{i\}) + v(\{j\}) = 0 < 2 = v(\{i,j\})$$

y

$$v(N \backslash \{i\}) + v(\{i\}) = 2 < 3 = v(N).$$

5.1.- Preliminares

- *Simple* si para cada $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.

5.1.- Preliminares

- *Simple* si para cada $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.
  - Ejemplo (votación por mayoría): $n = 5$, $v(S) = 1$ si $|S| \geq 3$ y $v(S) = 0$ si $|S| \leq 2$.

5.1.- Preliminares

- *Simple* si para cada $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.
  - Ejemplo (votación por mayoría): $n = 5$, $v(S) = 1$ si $|S| \geq 3$ y $v(S) = 0$ si $|S| \leq 2$.
- *Convexo* si para cada $S, T \subseteq N$,

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

5.1.- Preliminares

- *Simple* si para cada $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.
  - Ejemplo (votación por mayoría): $n = 5$, $v(S) = 1$ si $|S| \geq 3$ y $v(S) = 0$ si $|S| \leq 2$.
- *Convexo* si para cada $S, T \subseteq N$,

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

  - Cada juego convexo es superaditivo.

5.1.- Preliminares

- *Simple* si para cada $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.
  - Ejemplo (votación por mayoría): $n = 5$, $v(S) = 1$ si $|S| \geq 3$ y $v(S) = 0$ si $|S| \leq 2$.
- *Convexo* si para cada $S, T \subseteq N$,

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

  - Cada juego convexo es superaditivo.
  - Equivalente, un juego v es *convexo* si para cada $i \in N$ y cada $S \subseteq T \subseteq N \backslash \{i\}$,

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

5.1.- Preliminares

- *Simple* si para cada $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.
  - Ejemplo (votación por mayoría): $n = 5$, $v(S) = 1$ si $|S| \geq 3$ y $v(S) = 0$ si $|S| \leq 2$.
- *Convexo* si para cada $S, T \subseteq N$,

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

  - Cada juego convexo es superaditivo.
  - Equivalente, un juego v es *convexo* si para cada $i \in N$ y cada $S \subseteq T \subseteq N \backslash \{i\}$,

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

  - En un juego convexo, la contribución marginal de cualquier jugador aumenta cuanto más grande sea la coalición a la que él contribuye.

5.1.- Preliminares

Ejemplo Consideramos el juego (N, v) donde $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 0 \\ v(\{2\}) &= 0 \\ v(\{3\}) &= 0 \\ v(\{1,2\}) &= 10 \\ v(\{1,3\}) &= 10 \\ v(\{2,3\}) &= 12 \\ v(N) &= 15. \end{aligned}$$

5.1.- Preliminares

Ejemplo Consideramos el juego (N, v) donde $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 0 \\ v(\{2\}) &= 0 \\ v(\{3\}) &= 0 \\ v(\{1,2\}) &= 10 \\ v(\{1,3\}) &= 10 \\ v(\{2,3\}) &= 12 \\ v(N) &= 15. \end{aligned}$$

- El juego v es esencial, monótono y superaditivo. Por tanto, $v \in G$.

5.1.- Preliminares

Ejemplo Consideramos el juego (N, v) donde $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 0 \\ v(\{2\}) &= 0 \\ v(\{3\}) &= 0 \\ v(\{1,2\}) &= 10 \\ v(\{1,3\}) &= 10 \\ v(\{2,3\}) &= 12 \\ v(N) &= 15. \end{aligned}$$

- El juego v es esencial, monótono y superaditivo. Por tanto, $v \in G$.
- Pero v no es convexo dado que para $i = 1$, $S = \{2\}$ y $T = \{2, 3\}$,

$$v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 15 - 12 = 3 < 10 = v(\{1,2\}) - v(\{2\}).$$

5.1.- Preliminares

- Sea G un clase de todos juegos (cooperativos y superaditivos).

5.1.- Preliminares

- Sea G un clase de todos juegos (cooperativos y superaditivos).
  - $v \in G$ (o $(N, v) \in G$) es un juego.

5.1.- Preliminares

- Sea G un clase de todos juegos (cooperativos y superaditivos).
  - $v \in G$ (o $(N, v) \in G$) es un juego.
- En juegos superaditivos, dado la posibilidad que los jugadores pueden conseguir acuerdos vinculantes, los jugadores acabarán cooperando. Así, ellos dividirán eficientemente $v(N)$ entre ellos.

5.1.- Preliminares

- Sea G un clase de todos juegos (cooperativos y superaditivos).
  - $v \in G$ (o $(N, v) \in G$) es un juego.
- En juegos superaditivos, dado la posibilidad que los jugadores pueden conseguir acuerdos vinculantes, los jugadores acabarán cooperando. Así, ellos dividirán eficientemente $v(N)$ entre ellos.
- Pregunta: ¿Cómo lo harán?

5.1.- Preliminares

- Sea G un clase de todos juegos (cooperativos y superaditivos).
  - $v \in G$ (o $(N, v) \in G$) es un juego.
- En juegos superaditivos, dado la posibilidad que los jugadores pueden conseguir acuerdos vinculantes, los jugadores acabarán cooperando. Así, ellos dividirán eficientemente $v(N)$ entre ellos.
- Pregunta: ¿Cómo lo harán?
- Pregunta positiva: ¿Cuál es el conjunto de divisiones estables de $v(N)$?

5.1.- Preliminares

- Sea $v \in G$ un juego.

5.1.- Preliminares

- Sea $v \in G$ un juego.
- El conjunto de *pre-imputaciones* de $v \in G$, denotado por $I^*(v)$, está definido por

$$I^*(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \right\}.$$

5.1.- Preliminares

- Sea $v \in G$ un juego.
- El conjunto de *pre-imputaciones* de $v \in G$, denotado por $I^*(v)$, está definido por

$$I^*(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \right\}.$$

- Dado una familia de juegos B, una *solución* de B es una correspondencia $\Phi : B \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada $v \in B$, Φ selecciona un subconjunto de $I^*(v)$; es decir, $\Phi(v) \subseteq I^*(v)$ para cada $v \in B$.

5.1.- Preliminares

- Sea $v \in G$ un juego.
- El conjunto de *pre-imputaciones* de $v \in G$, denotado por $I^*(v)$, está definido por

$$I^*(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \right\}.$$

- Dado una familia de juegos B, una *solución* de B es una correspondencia $\Phi : B \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada $v \in B$, Φ selecciona un subconjunto de $I^*(v)$; es decir, $\Phi(v) \subseteq I^*(v)$ para cada $v \in B$.
- En muchas soluciones es razonable requerir que la solución satisfaga racionalidades individuales.

5.1.- Preliminares

- Sea $v \in G$ un juego.
- El conjunto de *pre-imputaciones* de $v \in G$, denotado por $I^*(v)$, está definido por

$$I^*(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \right\}.$$

- Dado una familia de juegos B, una *solución* de B es una correspondencia $\Phi : B \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada $v \in B$, Φ selecciona un subconjunto de $I^*(v)$; es decir, $\Phi(v) \subseteq I^*(v)$ para cada $v \in B$.
- En muchas soluciones es razonable requerir que la solución satisfaga racionalidades individuales.
- El conjunto de *imputaciones de* $v \in G$, están denotados por $I(v)$, están definidos por

$$I(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \text{ and } x_i \geq v(\{i\}) \text{ for all } i \in N \right\}.$$

5.1.- Preliminares

Definición Una solucion $\Phi : B \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ es *racional a nivel individual* en B si para cada $v \in B$, $\Phi(v) \subseteq I(v)$.

5.1.- Preliminares

Definición Una solucion $\Phi : B \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ es *racional a nivel individual* en B si para cada $v \in B$, $\Phi(v) \subseteq I(v)$.

- Dado un juego $v \in G$, sea $x, y \in I(v)$.

5.1.- Preliminares

Definición Una solucion $\Phi : B \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ es *racional a nivel individual* en B si para cada $v \in B$, $\Phi(v) \subseteq I(v)$.

- Dado un juego $v \in G$, sea $x, y \in I(v)$.
- Supongamos que los jugadores están confrontados a elegir entre x y y. Una solución puede proveer un criterio de elegir una alternativa sobre la otra.

5.1.- Preliminares

Definición Una solucion $\Phi : B \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ es *racional a nivel individual* en B si para cada $v \in B$, $\Phi(v) \subseteq I(v)$.

- Dado un juego $v \in G$, sea $x, y \in I(v)$.
- Supongamos que los jugadores están confrontados a elegir entre x y y. Una solución puede proveer un criterio de elegir una alternativa sobre la otra.
- A no ser que $x = y$, dado que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = v(N)$, algunos jugadores prefieren x y algunos otros jugadores prefieren y.

5.1.- Preliminares

Definición Una solucion $\Phi : B \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ es *racional a nivel individual* en B si para cada $v \in B$, $\Phi(v) \subseteq I(v)$.

- Dado un juego $v \in G$, sea $x, y \in I(v)$.
- Supongamos que los jugadores están confrontados a elegir entre x y y. Una solución puede proveer un criterio de elegir una alternativa sobre la otra.
- A no ser que $x = y$, dado que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = v(N)$, algunos jugadores prefieren x y algunos otros jugadores prefieren y.
- Pero v puede contener información sobre el poder (la fuerza) de una coalición para forzar la elección de x sobre y, o de y sobre x.

5.1.- Preliminares

Definición Dado $v \in G$, $x, y \in I(v)$ y $S \subseteq N$ decimos que

- x *domina* y *mediante* S, escrito $xd_S y$, si

5.1.- Preliminares

Definición Dado $v \in G$, $x, y \in I(v)$ y $S \subseteq N$ decimos que

- x *domina* y *mediante* S, escrito $xd_S y$, si
  - $x_i > y_i$ para cada $i \in S$ y $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

5.1.- Preliminares

Definición Dado $v \in G$, $x, y \in I(v)$ y $S \subseteq N$ decimos que

- x *domina* y *mediante* S, escrito $xd_S y$, si
  - $x_i > y_i$ para cada $i \in S$ y $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.
    - Todos los miembros de S estrictamente prefieren x a y y ellos son capaces de obtener lo que les da x.

5.1.- Preliminares

Definición Dado $v \in G$, $x, y \in I(v)$ y $S \subseteq N$ decimos que

- x *domina* y *mediante* S, escrito $xd_S y$, si
  - $x_i > y_i$ para cada $i \in S$ y $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.
    - Todos los miembros de S estrictamente prefieren x a y y ellos son capaces de obtener lo que les da x.
    - Decimos que S *bloquea* $y \in I(v)$ so existe $x \in I(v)$ tal que $xd_S y$.

5.1.- Preliminares

Definición Dado $v \in G$, $x, y \in I(v)$ y $S \subseteq N$ decimos que

- x *domina* y *mediante* S, escrito $xd_S y$, si
  - $x_i > y_i$ para cada $i \in S$ y $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.
    - Todos los miembros de S estrictamente prefieren x a y y ellos son capaces de obtener lo que les da x.
    - Decimos que S *bloquea* $y \in I(v)$ so existe $x \in I(v)$ tal que $xd_S y$.
- x *domina* y, escrito xdy, si existe $S \subseteq N$ tal que $xd_S y$.

5.1.- Preliminares

Definición Dado $v \in G$, $x, y \in I(v)$ y $S \subseteq N$ decimos que

- x *domina* y *mediante* S, escrito $xd_S y$, si
  - $x_i > y_i$ para cada $i \in S$ y $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.
    - Todos los miembros de S estrictamente prefieren x a y y ellos son capaces de obtener lo que les da x.
    - Decimos que S *bloquea* $y \in I(v)$ so existe $x \in I(v)$ tal que $xd_S y$.
- x *domina* y, escrito xdy, si existe $S \subseteq N$ tal que $xd_S y$.
- En el ejemplo, $x = (3, 6, 6)$ domina $y = (4, 5{,}5, 5{,}5)$ mediante $S = \{2, 3\}$ dado que $i = 2, 3$, $x_i = 6 > 5{,}5 = y_i$ y $x_2 + x_3 = 6 + 6 = 12 = v(\{2, 3\})$.

5.2.- Núcleo

Definición El *núcleo* de un juego $v \in G$, denotado como $C(v)$, es el conjunto de todas las imputaciones no dominadas de v. Es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid \nexists y \in I(v) \text{ tal que } y dx\}.$$

5.2.- Núcleo

Definición El *núcleo* de un juego $v \in G$, denotado como $C(v)$, es el conjunto de todas las imputaciones no dominadas de v. Es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid \nexists y \in I(v) \text{ tal que } ydx\}.$$

- Gillies, D. B. *Some Theorems on n−Person Games*. Ph.D. Thesis, Princeton University Press, 1953.

5.2.- Núcleo

Definición El *núcleo* de un juego $v \in G$, denotado como $C(v)$, es el conjunto de todas las imputaciones no dominadas de v. Es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid \nexists y \in I(v) \text{ tal que } ydx\}.$$

- Gillies, D. B. *Some Theorems on n−Person Games*. Ph.D. Thesis, Princeton University Press, 1953.

5.2.- Núcleo

Definición El *núcleo* de un juego $v \in G$, denotado como $C(v)$, es el conjunto de todas las imputaciones no dominadas de v. Es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid \nexists y \in I(v) \text{ tal que } ydx\}.$$

- Gillies, D. B. *Some Theorems on n−Person Games*. Ph.D. Thesis, Princeton University Press, 1953.

Theorem

(Gillies, 1953) Para cada $v \in G$,

$$\begin{aligned} C(v) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \text{ and } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ for all } S \subset N \right\} \\ &\equiv A(v). \end{aligned}$$

5.2.- Núcleo

Comentario $C(v)$ es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$: es *politopo* (un objeto geométrico con lados planos).

5.2.- Núcleo

Comentario $C(v)$ es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$: es *politopo* (un objeto geométrico con lados planos).

Ejemplo

- Consideramos cualquier $(0\text{-}1)-$ juego normalizado $(N, v) \in G$, donde $v(N) = 1$ y $v(\{i\}) = 0$ para cada $i \in N$. En particular asumimos que $N = \{1, 2, 3\}$.

5.2.- Núcleo

Comentario $C(v)$ es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$: es *politopo* (un objeto geométrico con lados planos).

Ejemplo

- Consideramos cualquier $(0\text{-}1)-$ juego normalizado $(N, v) \in G$, donde $v(N) = 1$ y $v(\{i\}) = 0$ para cada $i \in N$. En particular asumimos que $N = \{1, 2, 3\}$.
- El conjunto de imputaciones $I(v)$ son todos los vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ tal que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

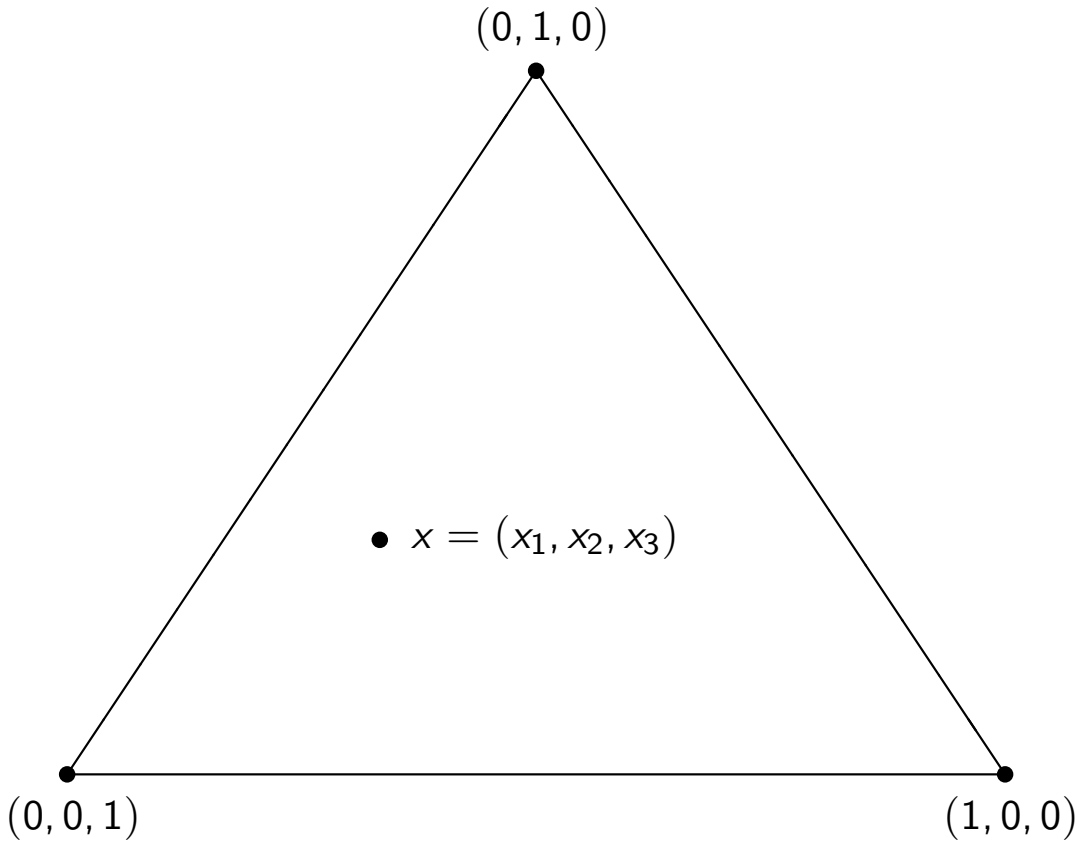
5.2.- Núcleo

Comentario $C(v)$ es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$: es *politopo* (un objeto geométrico con lados planos).

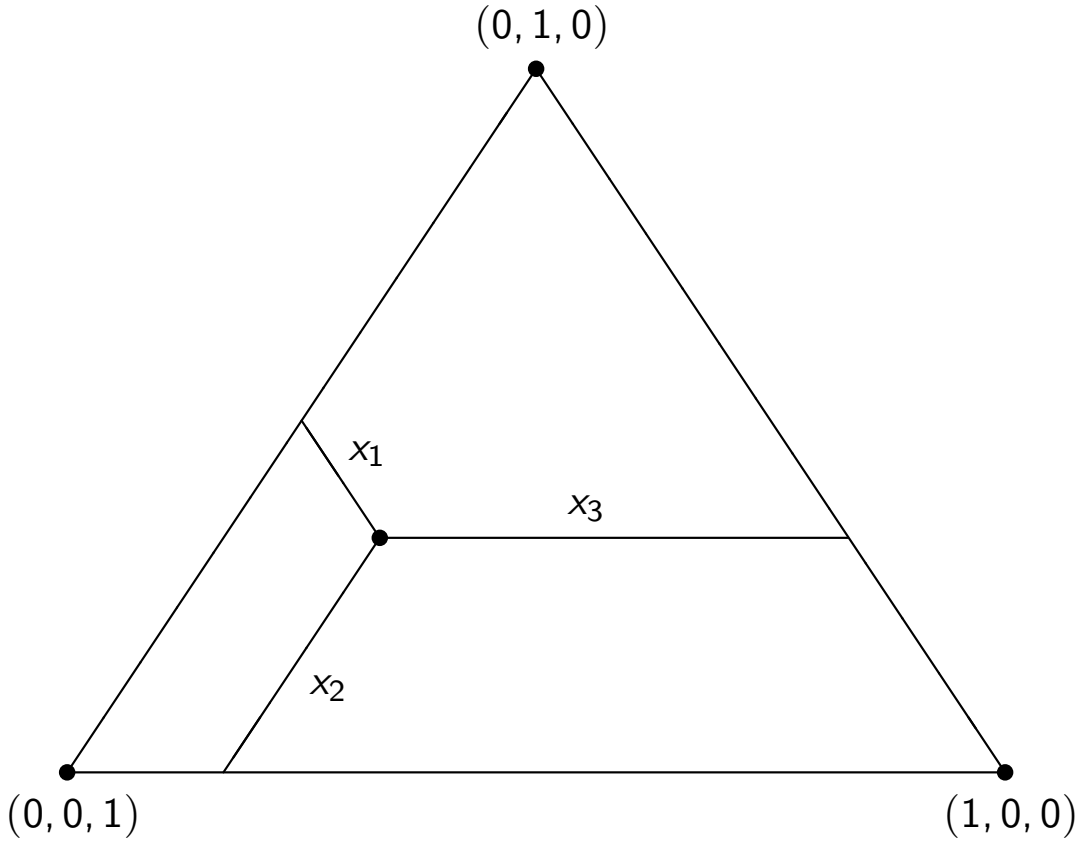
Ejemplo

- Consideramos cualquier $(0\text{-}1)-$ juego normalizado $(N, v) \in G$, donde $v(N) = 1$ y $v(\{i\}) = 0$ para cada $i \in N$. En particular asumimos que $N = \{1, 2, 3\}$.
- El conjunto de imputaciones $I(v)$ son todos los vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ tal que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
  - Se puede representar gráficamente como un triángulo.

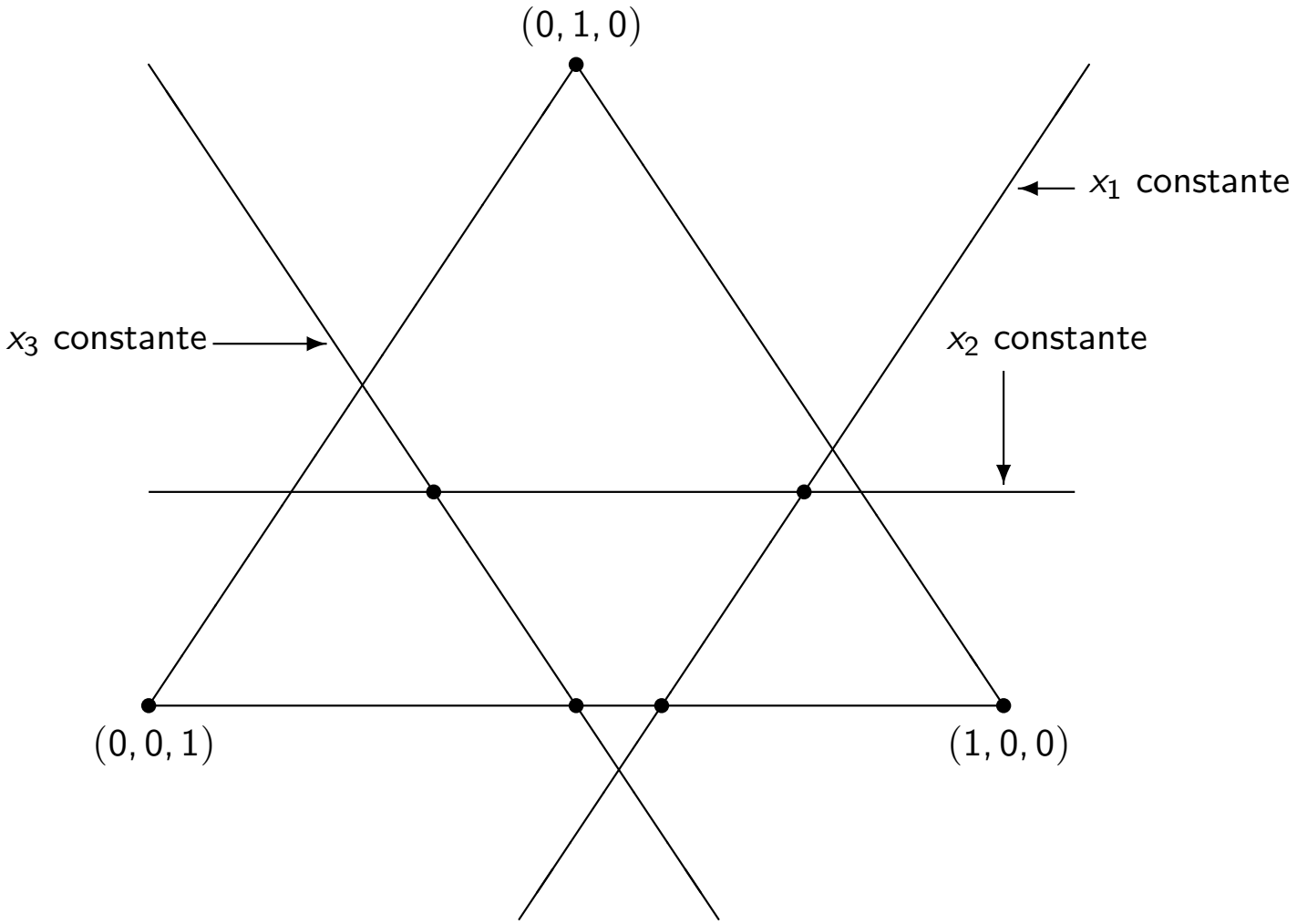
5.2.- Núcleo



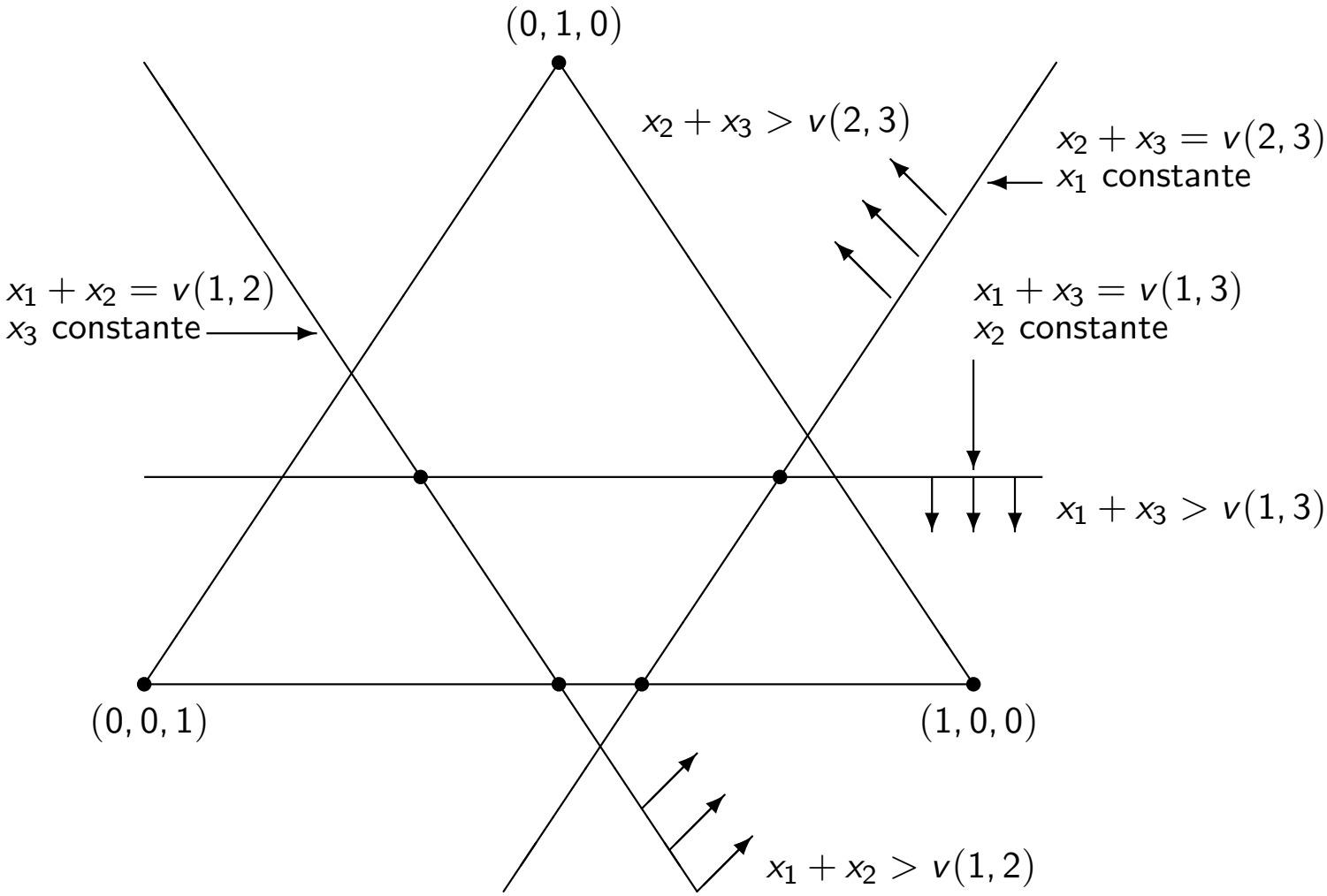
5.2.- Núcleo



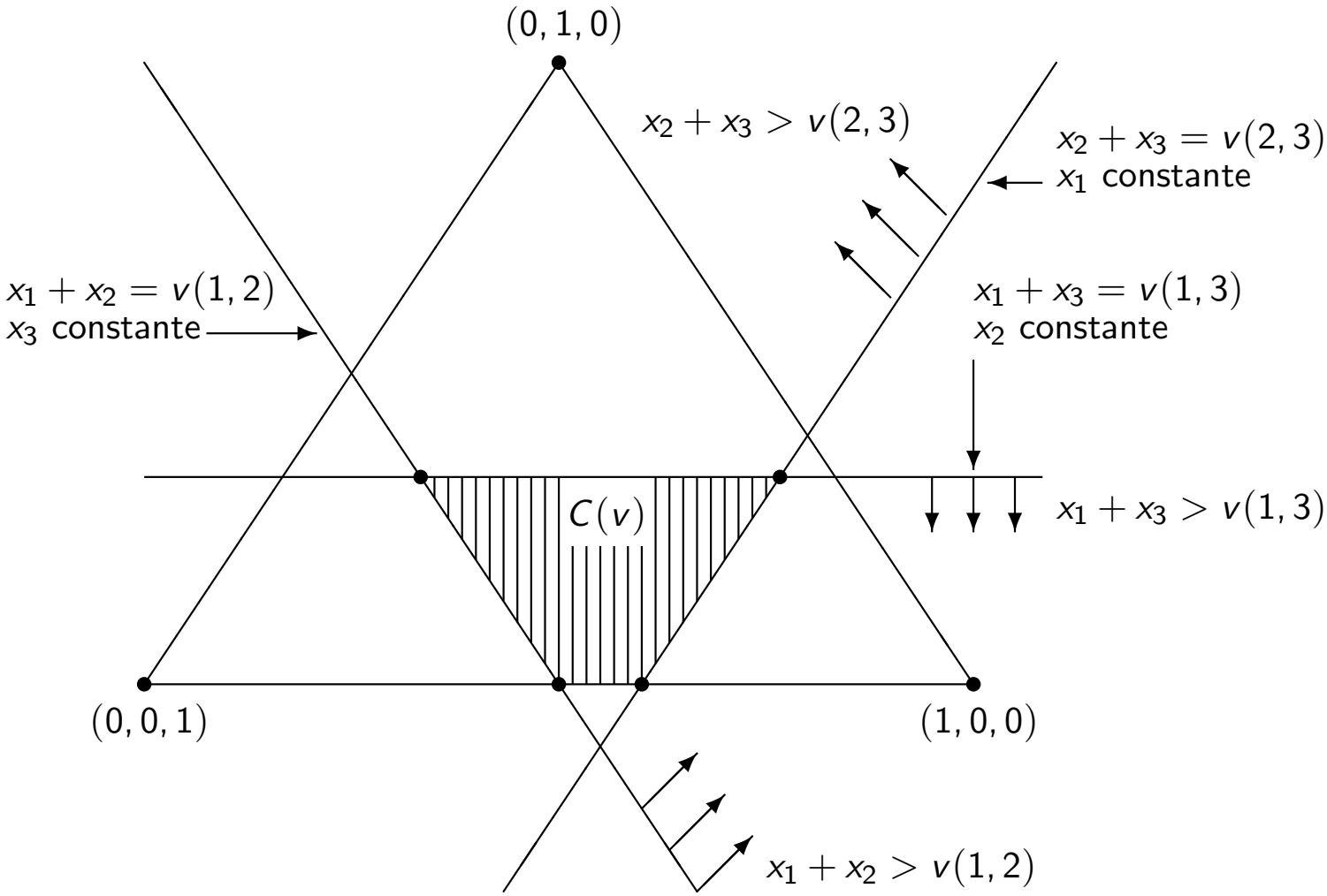
5.2.- Núcleo



5.2.- Núcleo


(0, 1, 0)
$x_2 + x_3 > v(2,3)$
$x_2 + x_3 = v(2,3)$
x_1 constante
$x_1 + x_2 = v(1,2)$
x_3 constante
$x_1 + x_3 = v(1,3)$
x_2 constante
$x_1 + x_3 > v(1,3)$
(0, 0, 1)
(1, 0, 0)
$x_1 + x_2 > v(1,2)$

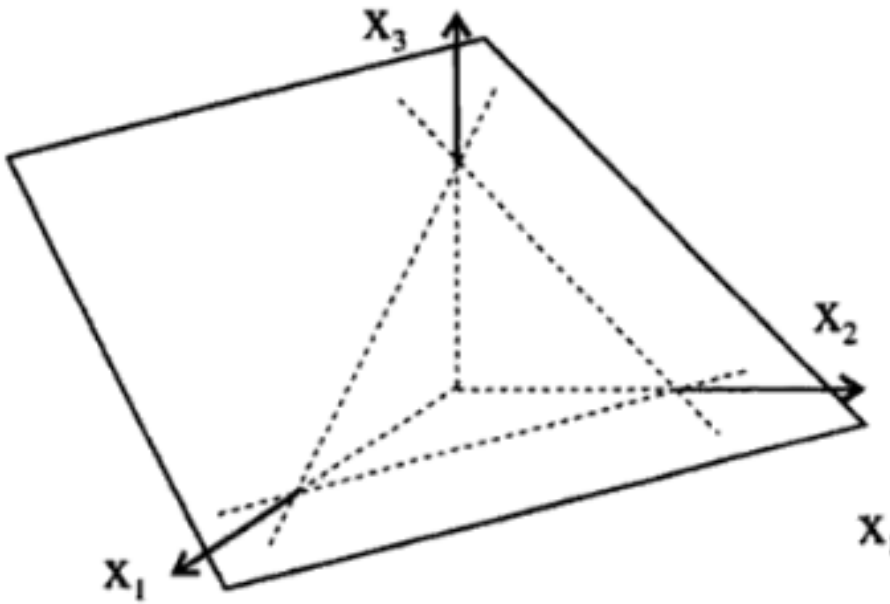
5.2.- Núcleo

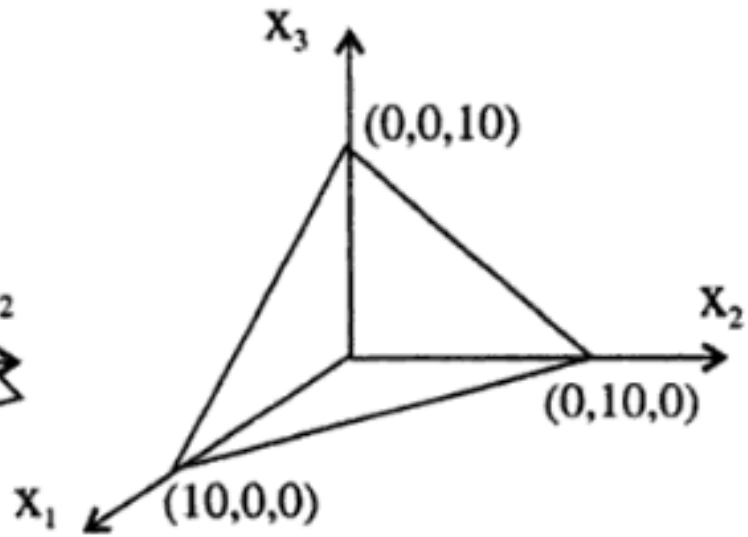

(0, 1, 0)
$x_2 + x_3 > v(2,3)$
$x_2 + x_3 = v(2,3)$
x_1 constante
$x_1 + x_2 = v(1,2)$
x_3 constante
$x_1 + x_3 = v(1,3)$
x_2 constante
$C(v)$
$x_1 + x_3 > v(1,3)$
(0, 0, 1)
(1, 0, 0)
$x_1 + x_2 > v(1,2)$

Ejemplo

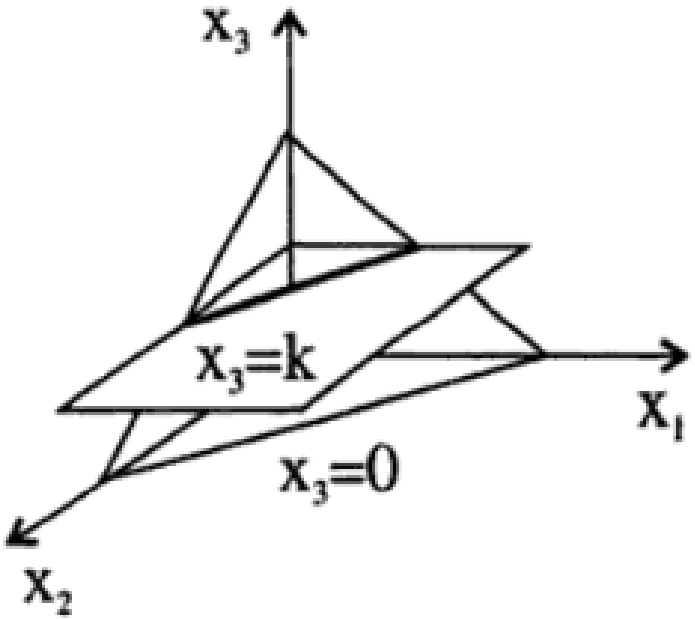
$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 0 \\ v(\{2\}) &= 0 \\ v(\{3\}) &= 0 \\ v(\{1,2\}) &= 2 \\ v(\{1,3\}) &= 2 \\ v(\{2,3\}) &= 2 \\ v(N) &= 10. \end{aligned}$$

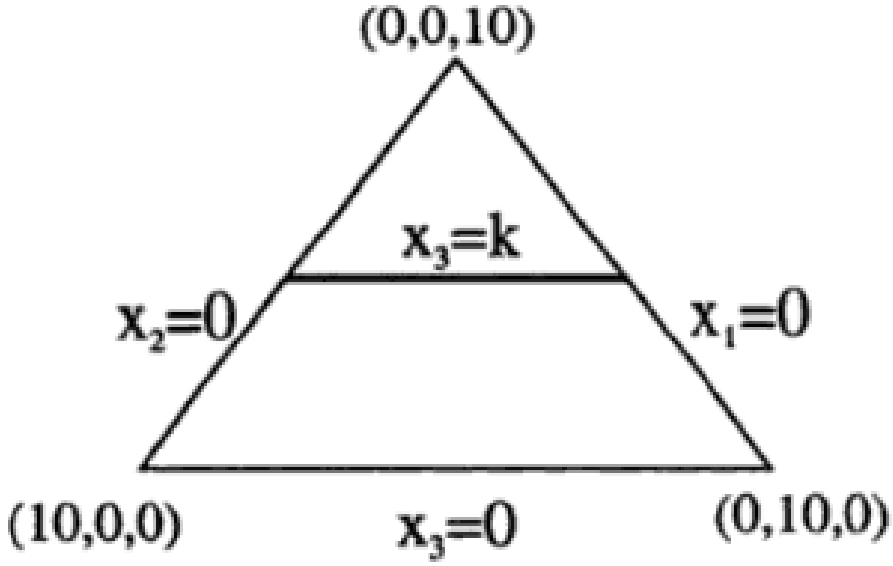
5.2.- Núcleo



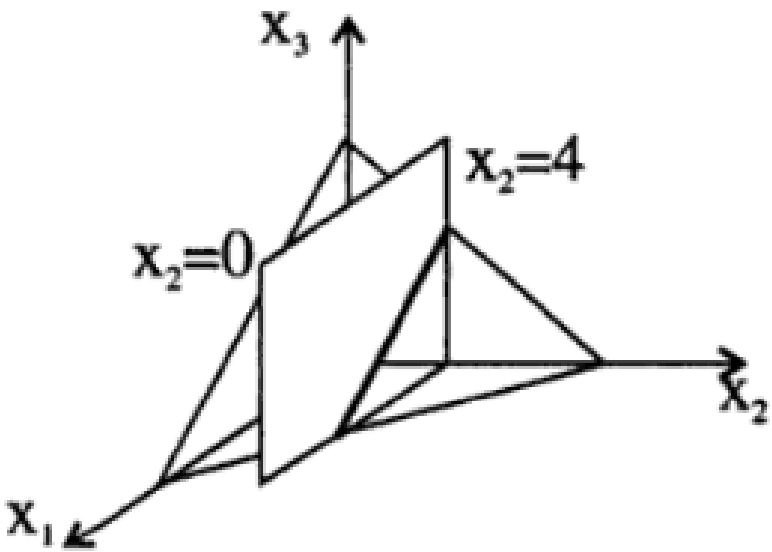


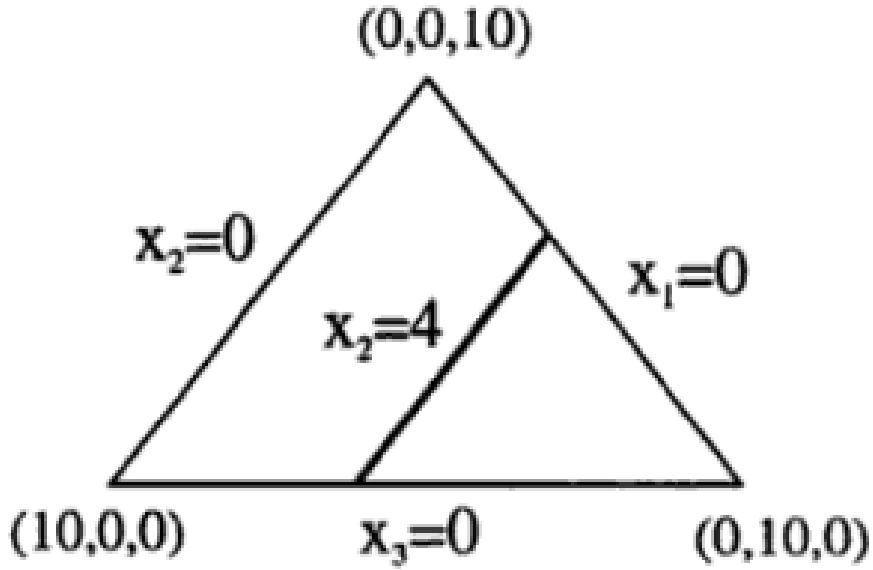
5.2.- Núcleo



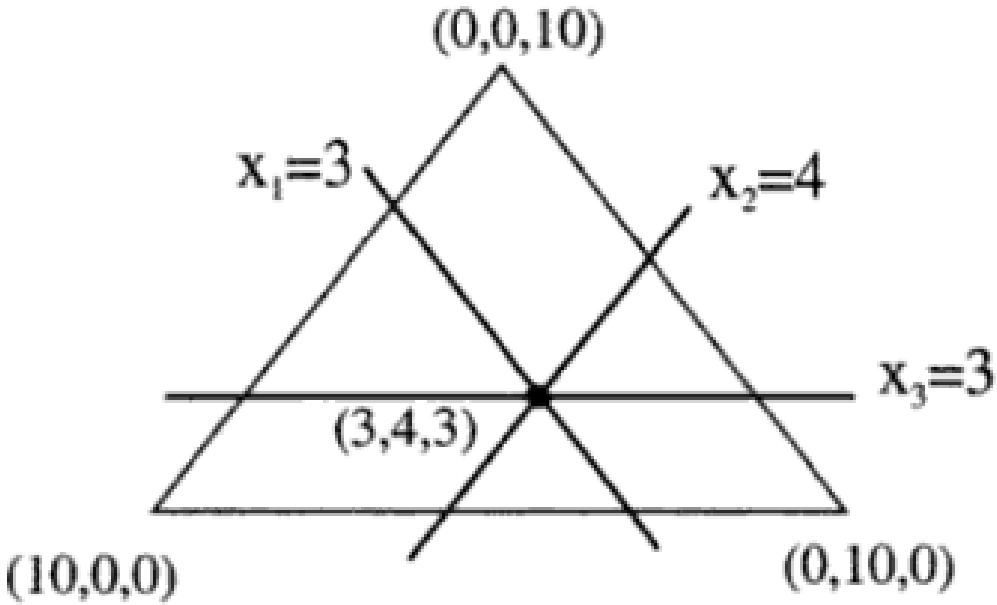


5.2.- Núcleo





5.2.- Núcleo



5.2.- Núcleo

- Teorema de Gillies no dice nada sobre la posibilidad de que $C(v) = \varnothing$.

5.2.- Núcleo

- Teorema de Gillies no dice nada sobre la posibilidad de que $C(v) = \varnothing$.

5.2.- Núcleo

- Teorema de Gillies no dice nada sobre la posibilidad de que $C(v) = \varnothing$.
- **Ejemplo** Votación por mayoría con tres votantes.

5.2.- Núcleo

- Teorema de Gillies no dice nada sobre la posibilidad de que $C(v) = \varnothing$.
- **Ejemplo** Votación por mayoría con tres votantes.
  - $N = \{1, 2, 3\}$.

5.2.- Núcleo

- Teorema de Gillies no dice nada sobre la posibilidad de que $C(v) = \varnothing$.
- **Ejemplo** Votación por mayoría con tres votantes.
  - $N = \{1, 2, 3\}$.
  - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$ y
    $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$.

5.2.- Núcleo

- Teorema de Gillies no dice nada sobre la posibilidad de que $C(v) = \varnothing$.
- **Ejemplo** Votación por mayoría con tres votantes.
  - $N = \{1, 2, 3\}$.
  - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$ y $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$.
  - Suppose that $x \in C(v)$. Entonces

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ \hline 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3. \end{array}$$

5.2.- Núcleo

- Teorema de Gillies no dice nada sobre la posibilidad de que $C(v) = \varnothing$.
- **Ejemplo** Votación por mayoría con tres votantes.
  - $N = \{1, 2, 3\}$.
  - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$ y $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$.
  - Suppose that $x \in C(v)$. Entonces

$$\begin{array}{r} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ \hline 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3. \end{array}$$

  - Por lo tanto, $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{2} > 1 = v(N)$, contradice a que $x \in I(v)$.

5.2.- Núcleo

- Teorema de Gillies no dice nada sobre la posibilidad de que $C(v) = \varnothing$.
- **Ejemplo** Votación por mayoría con tres votantes.
  - $N = \{1, 2, 3\}$.
  - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$ y $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$.
  - Suppose that $x \in C(v)$. Entonces

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ \hline 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3. \end{array}$$

  - Por lo tanto, $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{2} > 1 = v(N)$, contradice a que $x \in I(v)$.
  - As; $C(v) = \varnothing$

5.2.- Núcleo

- **Ejemplo** (Continuación)

5.2.- Núcleo

- **Ejemplo** (Continuación)
  - ¿Por qué $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \notin C(v)$?

5.2.- Núcleo

- **Ejemplo** (Continuación)
  - ¿Por qué $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \notin C(v)$?
  - Coalición $\{1, 2\}$ (o cualquier otra coalición de dos jugadores) puede bloquear la imputación del equilibrio con $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, pero entonces, $\{2, 3\}$ puede bloquearlo con $\left(0, \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$, y entonces, $\{1, 3\}$ lo puede bloquear con ...

5.2.- Núcleo

- **Ejemplo** (Continuación)
  - ¿Por qué $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \notin C(v)$?
  - Coalición $\{1, 2\}$ (o cualquier otra coalición de dos jugadores) puede bloquear la imputación del equilibrio con $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, pero entonces, $\{2, 3\}$ puede bloquearlo con $\left(0, \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$, y entonces, $\{1, 3\}$ lo puede bloquear con ...
  - Sugerencia: Introducir el comportamiento de mirar al futuro; *i.e.*, cuando bloqueando una imputación los jugadores pueden predecir las consecuencias de su acción (Conjunto de Negociación).

5.2.- Núcleo

- **Ejemplo** (Continuación)
  - ¿Por qué $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \notin C(v)$?
  - Coalición $\{1, 2\}$ (o cualquier otra coalición de dos jugadores) puede bloquear la imputación del equilibrio con $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, pero entonces, $\{2, 3\}$ puede bloquearlo con $\left(0, \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$, y entonces, $\{1, 3\}$ lo puede bloquear con ...
  - Sugerencia: Introducir el comportamiento de mirar al futuro; *i.e.*, cuando bloqueando una imputación los jugadores pueden predecir las consecuencias de su acción (Conjunto de Negociación).
- Hay una caraterización de la clase de juegos con el núcleo no-vacío (juegos equilibrados).

5.2.- Núcleo

- **Ejemplo** (Continuación)
  - ¿Por qué $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \notin C(v)$?
  - Coalición $\{1, 2\}$ (o cualquier otra coalición de dos jugadores) puede bloquear la imputación del equilibrio con $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, pero entonces, $\{2, 3\}$ puede bloquearlo con $\left(0, \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$, y entonces, $\{1, 3\}$ lo puede bloquear con ...
  - Sugerencia: Introducir el comportamiento de mirar al futuro; *i.e.*, cuando bloqueando una imputación los jugadores pueden predecir las consecuencias de su acción (Conjunto de Negociación).
- Hay una caraterización de la clase de juegos con el núcleo no-vacío (juegos equilibrados).
  - Bondareva, O.N. "Certain Applications of the Methods of Linear Programming to the Theory of Cooperative Games," *Problemy Kibernet* 10, 1963.

5.2.- Núcleo

- **Ejemplo** (Continuación)
  - ¿Por qué $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \notin C(v)$?
  - Coalición $\{1, 2\}$ (o cualquier otra coalición de dos jugadores) puede bloquear la imputación del equilibrio con $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, pero entonces, $\{2, 3\}$ puede bloquearlo con $\left(0, \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$, y entonces, $\{1, 3\}$ lo puede bloquear con ...
  - Sugerencia: Introducir el comportamiento de mirar al futuro; *i.e.*, cuando bloqueando una imputación los jugadores pueden predecir las consecuencias de su acción (Conjunto de Negociación).
- Hay una caraterización de la clase de juegos con el núcleo no-vacío (juegos equilibrados).
  - Bondareva, O.N. "Certain Applications of the Methods of Linear Programming to the Theory of Cooperative Games," *Problemy Kibernet* 10, 1963.
  - Shapley, L. "On Balanced Sets and Cores," *Naval Research Logistics Quarterly* 14, 1967.

5.2.- Núcleo

- Dado un conjunto de jugadores $N = \{1, ..., n\}$ decimos que $\{\delta_S\}_{S \in 2^N}$ es una *familia equilibrada de pesos* si para cada $S \in 2^N$, $\delta_S \in [0, 1]$ y para cada $i \in N$,

$$\sum_{\substack{S \in 2^N \\ i \in S}} \delta_S = 1.$$

5.2.- Núcleo

- Dado un conjunto de jugadores $N = \{1, ..., n\}$ decimos que $\{\delta_S\}_{S \in 2^N}$ es una *familia equilibrada de pesos* si para cada $S \in 2^N$, $\delta_S \in [0, 1]$ y para cada $i \in N$,

$$\sum_{\substack{S \in 2^N \\ i \in S}} \delta_S = 1.$$

- **Interpretación** Cada jugador i tiene una cantidad fija de tiempo (1 unidad) y si $i \in S$, δ_S es la proporción del tiempo que el jugador i coopera con la coalición S.

5.2.- Núcleo

- Dado un conjunto de jugadores $N = \{1, ..., n\}$ decimos que $\{\delta_S\}_{S \in 2^N}$ es una *familia equilibrada de pesos* si para cada $S \in 2^N$, $\delta_S \in [0, 1]$ y para cada $i \in N$,

$$\sum_{\substack{S \in 2^N \\ i \in S}} \delta_S = 1.$$

- **Interpretación** Cada jugador i tiene una cantidad fija de tiempo (1 unidad) y si $i \in S$, δ_S es la proporción del tiempo que el jugador i coopera con la coalición S.

- **Ejemplos** $N = \{1, 2, 3\}$.

5.2.- Núcleo

- Dado un conjunto de jugadores $N = \{1, ..., n\}$ decimos que $\{\delta_S\}_{S \in 2^N}$ es una *familia equilibrada de pesos* si para cada $S \in 2^N$, $\delta_S \in [0, 1]$ y para cada $i \in N$,

$$\sum_{\substack{S \in 2^N \\ i \in S}} \delta_S = 1.$$

- **Interpretación** Cada jugador i tiene una cantidad fija de tiempo (1 unidad) y si $i \in S$, δ_S es la proporción del tiempo que el jugador i coopera con la coalición S.

- **Ejemplos** $N = \{1, 2, 3\}$.
  - $\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2\}} = \delta_{\{3\}} = \delta_{\{1,2,3\}} = 0$ y $\delta_{\{1,2\}} = \delta_{\{1,3\}} = \delta_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}$.

5.2.- Núcleo

- Dado un conjunto de jugadores $N = \{1, ..., n\}$ decimos que $\{\delta_S\}_{S \in 2^N}$ es una *familia equilibrada de pesos* si para cada $S \in 2^N$, $\delta_S \in [0, 1]$ y para cada $i \in N$,

$$\sum_{\substack{S \in 2^N \\ i \in S}} \delta_S = 1.$$

- **Interpretación** Cada jugador i tiene una cantidad fija de tiempo (1 unidad) y si $i \in S$, δ_S es la proporción del tiempo que el jugador i coopera con la coalición S.

- **Ejemplos** $N = \{1, 2, 3\}$.
  - $\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2\}} = \delta_{\{3\}} = \delta_{\{1,2,3\}} = 0$ y $\delta_{\{1,2\}} = \delta_{\{1,3\}} = \delta_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}$.
  - $\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2\}} = \delta_{\{3\}} = 1$ y $\delta_{\{1,2\}} = \delta_{\{1,3\}} = \delta_{\{2,3\}} = \delta_{\{1,2,3\}} = 0$.

5.2.- Núcleo

Theorem

(Bondareva, 1963; Shapley, 1967) Sea $v \in G$. Entonces, $C(v) \neq \varnothing$ si y solo si para toda la familia equilibrada de pesos $\{\delta_S\}_{S \in 2^N}$,

$$\sum_{S \subsetneq N} \delta_S \cdot v(S) \leq v(N).$$

5.2.- Núcleo

Theorem

(Bondareva, 1963; Shapley, 1967) Sea $v \in G$. Entonces, $C(v) \neq \varnothing$ si y solo si para toda la familia equilibrada de pesos $\{\delta_S\}_{S \in 2^N}$,

$$\sum_{S \subsetneq N} \delta_S \cdot v(S) \leq v(N).$$

- **Ejemplo** $n = 3$ y votación por mayoría; *i.e.*, $v(S) = 1$ si y solo si $\#S \geq 2$. Consideramos la familia equilibrada de pesos $\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2\}} = \delta_{\{3\}} = \delta_{\{1,2,3\}} = 0$ y $\delta_{\{1,2\}} = \delta_{\{1,3\}} = \delta_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}$. Entonces,

$$\delta_1 v(1) + \delta_2 v(2) + \delta_3 v(3) + \delta_{12} v(12) + \delta_{13} v(13) + \delta_{23} v(23) \overset{?}{\leq} v(123).$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \overset{?}{\leq} 1$$

5.2.- Núcleo

Theorem

(Bondareva, 1963; Shapley, 1967) Sea $v \in G$. Entonces, $C(v) \neq \varnothing$ si y solo si para toda la familia equilibrada de pesos $\{\delta_S\}_{S \in 2^N}$,

$$\sum_{S \subsetneq N} \delta_S \cdot v(S) \leq v(N).$$

- **Ejemplo** $n = 3$ y votación por mayoría; *i.e.*, $v(S) = 1$ si y solo si $\#S \geq 2$. Consideramos la familia equilibrada de pesos $\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2\}} = \delta_{\{3\}} = \delta_{\{1,2,3\}} = 0$ y $\delta_{\{1,2\}} = \delta_{\{1,3\}} = \delta_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}$. Entonces,

$$\delta_1 v(1) + \delta_2 v(2) + \delta_3 v(3) + \delta_{12} v(12) + \delta_{13} v(13) + \delta_{23} v(23) \overset{?}{\leq} v(123).$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \overset{?}{\leq} 1$$

  - NO. Por lo tanto, $C(v) = \varnothing$.

5.2.- Núcleo

- **Definición** Decimos que un juego $v \in G$ es *equilibrado* si $C(v) \neq \varnothing$.

5.2.- Núcleo

- **Definición** Decimos que un juego $v \in G$ es *equilibrado* si $C(v) \neq \varnothing$.
- **Comentario** Cada juego convexo $v \in G$ es equilibrado.

5.3.- El valor Shapley

- **Idea-objetivo:** Resumir con un único número el "valor" para cada jugador de jugar el juego.

5.3.- El valor Shapley

- **Idea-objetivo:** Resumir con un único número el "valor" para cada jugador de jugar el juego.
- Un enfoque normativo: ¿Qué debería recibir el jugador i en juego $v \in G$?

5.3.- El valor Shapley

- **Idea-objetivo:** Resumir con un único número el "valor" para cada jugador de jugar el juego.
- Un enfoque normativo: ¿Qué debería recibir el jugador i en juego $v \in G$?
- Sea G el conjunto de todos los juegos superaditivos. Un *valor* es una función ϕ sobre G tal que para cada $(N, v) \in G$, $\phi(N, v) \in \mathbb{R}^n$.

5.3.- El valor Shapley

- **Idea-objetivo:** Resumir con un único número el "valor" para cada jugador de jugar el juego.
- Un enfoque normativo: ¿Qué debería recibir el jugador i en juego $v \in G$?
- Sea G el conjunto de todos los juegos superaditivos. Un *valor* es una función ϕ sobre G tal que para cada $(N, v) \in G$, $\phi(N, v) \in \mathbb{R}^n$.
- La interpretación es que dado el juego $(N, v) \in G$, $\phi_i(N, v)$ es el valor (o valor esperado) de jugar el juego (N, v) para $i \in N$.

5.3.- El valor Shapley

- **Idea-objetivo:** Resumir con un único número el "valor" para cada jugador de jugar el juego.
- Un enfoque normativo: ¿Qué debería recibir el jugador i en juego $v \in G$?
- Sea G el conjunto de todos los juegos superaditivos. Un *valor* es una función ϕ sobre G tal que para cada $(N, v) \in G$, $\phi(N, v) \in \mathbb{R}^n$.
- La interpretación es que dado el juego $(N, v) \in G$, $\phi_i(N, v)$ es el valor (o valor esperado) de jugar el juego (N, v) para $i \in N$.
- Shapley (1953) ha tratado el problema del punto de vista axiomática a partir de proponer propiedades razonables que cualquier valor debería satisfacer y ha demostrado que existe un único valor que las satisfaga: El Valor de Shapley.

5.3.- El Valor de Shapley

- Shapley, L. "A Value for $n-$Person Games". In *Contributions to the Theory of Games II*, editors: H. Kuhn and A. Tucker. Princeton University Press, 1953.

5.3.- El Valor de Shapley

- Shapley, L. "A Value for $n-$Person Games". In *Contributions to the Theory of Games II*, editors: H. Kuhn and A. Tucker. Princeton University Press, 1953.

5.3.- El Valor de Shapley

- Shapley, L. "A Value for $n-$Person Games". In *Contributions to the Theory of Games II*, editors: H. Kuhn and A. Tucker. Princeton University Press, 1953.

EFICIENCIA (EFF) Un valor ϕ es *eficiente* si para cada $(N, v) \in G$,

$$\sum_{i \in N} \phi_i(N, v) = v(N).$$

5.3.- El Valor de Shapley

- Los jugadores $i, j \in N$ son *simétricos* en un juego $(N, v) \in G$ si para cada $S \in 2^N$ tal que $\{i, j\} \cap S = \varnothing$ tenemos $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

5.3.- El Valor de Shapley

- Los jugadores $i, j \in N$ son *simétricos* en un juego $(N, v) \in G$ si para cada $S \in 2^N$ tal que $\{i, j\} \cap S = \varnothing$ tenemos $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

5.3.- El Valor de Shapley

- Los jugadores $i, j \in N$ son *simétricos* en un juego $(N, v) \in G$ si para cada $S \in 2^N$ tal que $\{i, j\} \cap S = \varnothing$ tenemos $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

SIMETRÍA (SYM) Un valos ϕ es *simétrico* si para todos los jugadores simétricos $i, j \in N$ en juego $(N, v) \in G$,

$$\phi_i(N, v) = \phi_j(N, v).$$

5.3.- El Valor de Shapley

Un jugador $i \in N$ es un dummy (tonto) en (N, v) si para cada $S \subseteq N \backslash \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$.

5.3.- El Valor de Shapley

Un jugador $i \in N$ es un dummy (tonto) en (N, v) si para cada $S \subseteq N \backslash \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$.

JUGADOR DUMMY (DUM) Un valor ϕ satisface la propiedad del jugador dummy si para cada jugador $i \in N$ es dummy en (N, v), $\phi_i(N, v) = v(\{i\})$.

5.3.- El Valor de Shapley

Dado $u, v \in G$ definimos un juego nuevo $(u+v) \in G$ de la manera siguiente: para cada $S \subseteq N$, $(u+v)(S) = u(S) + v(S)$.

5.3.- El Valor de Shapley

Dado $u, v \in G$ definimos un juego nuevo $(u+v) \in G$ de la manera siguiente: para cada $S \subseteq N$, $(u+v)(S) = u(S) + v(S)$.

Dado $v \in G$ y $\beta > 0$ definimos un nuevo juego $(\beta v) \in G$ de la siguiente manera: para cada $S \subseteq N$, $(\beta v)(S) = \beta \cdot v(S)$.

5.3.- El Valor de Shapley

Dado $u, v \in G$ definimos un juego nuevo $(u+v) \in G$ de la manera siguiente: para cada $S \subseteq N$, $(u+v)(S) = u(S) + v(S)$.

Dado $v \in G$ y $\beta > 0$ definimos un nuevo juego $(\beta v) \in G$ de la siguiente manera: para cada $S \subseteq N$, $(\beta v)(S) = \beta \cdot v(S)$.

LINEALIDAD (LIN) Un valor ϕ satisface *linealidad* si para cada $u, v \in G$, cada $\beta > 0$, y cada $i \in N$,

$$\phi_i(u + (\beta v)) = \phi_i(u) + \beta \cdot \phi_i(v).$$

5.3.- El Valor de Shapley

Dado $u, v \in G$ definimos un juego nuevo $(u+v) \in G$ de la manera siguiente: para cada $S \subseteq N$, $(u+v)(S) = u(S) + v(S)$.

Dado $v \in G$ y $\beta > 0$ definimos un nuevo juego $(\beta v) \in G$ de la siguiente manera: para cada $S \subseteq N$, $(\beta v)(S) = \beta \cdot v(S)$.

LINEALIDAD (LIN) Un valor ϕ satisface *linealidad* si para cada $u, v \in G$, cada $\beta > 0$, y cada $i \in N$,

$$\phi_i(u + (\beta v)) = \phi_i(u) + \beta \cdot \phi_i(v).$$

Interpretación Supongamos que los juegos u y v estarán jugados con las probabilidades p y $1-p$, respectivamente (con $p \in [0,1]$). Entonces, $pu + (1-p)v$ puede estar considerado como un juego compuesto. Entonces, asumiendo que se cumple la propiedad de la Utilidad Esperada,

$$\phi_i((pu) + ((1-p)v)) = p \cdot \phi_i(u) + (1-p) \cdot \phi_i(v).$$

5.3.- El Valor de Shapley

Theorem

(Shapley, 1953) There exists a unique value ϕ on G satisfying (Eff), (Sym), (Dum), *and* (Lin). *This function is the Shapley value, denoted by Sh, and it is defined as follows: for all $v \in G$ and all $i \in N$,*

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(\#S)!(\#N - \#S - 1)!}{\#N!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right].$$

5.3.- El Valor de Shapley

Theorem

(Shapley, 1953) There exists a unique value ϕ on G satisfying (Eff), (Sym), (Dum), *and* (Lin). *This function is the Shapley value, denoted by Sh, and it is defined as follows: for all $v \in G$ and all $i \in N$,*

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(\#S)!(\#N - \#S - 1)!}{\#N!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right].$$

Interpretation

5.3.- El Valor de Shapley

Theorem

(Shapley, 1953) There exists a unique value ϕ on G satisfying (Eff), (Sym), (Dum), *and* (Lin). *This function is the Shapley value, denoted by Sh, and it is defined as follows: for all $v \in G$ and all $i \in N$,*

$$Sh_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(\#S)!(\#N - \#S - 1)!}{\#N!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right].$$

Interpretation

- $[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$ is the *marginal contribution* of player i to coalition S.

5.3.- El Valor de Shapley

Theorem

(Shapley, 1953) There exists a unique value ϕ on G satisfying (Eff), (Sym), (Dum), *and* (Lin). *This function is the Shapley value, denoted by Sh, and it is defined as follows: for all $v \in G$ and all $i \in N$,*

$$Sh_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(\#S)!(\#N - \#S - 1)!}{\#N!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right].$$

Interpretation

- $[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$ is the *marginal contribution* of player i to coalition S.
- Every player receives his "expected marginal contribution" in the following sense.

5.3.- El Valor de Shapley

- Players arrive randomly, one after the other.

5.3.- El Valor de Shapley

- Players arrive randomly, one after the other.
- Every order of arrival is equally likely: $\frac{1}{\#N!}$ probability of each of the $\#N!$ orderings.

5.3.- El Valor de Shapley

- Players arrive randomly, one after the other.
- Every order of arrival is equally likely: $\frac{1}{\#N!}$ probability of each of the $\#N!$ orderings.
- For each $S \subset N$ and $i \notin S$, $(\#S)!(\#N - \#S - 1)!$ is the number of orderings in which

$$\underbrace{S} \quad i \quad \underbrace{N \backslash (S \cup \{i\}}.$$

5.3.- El Valor de Shapley

- Players arrive randomly, one after the other.
- Every order of arrival is equally likely: $\frac{1}{\#N!}$ probability of each of the $\#N!$ orderings.
- For each $S \subset N$ and $i \notin S$, $(\#S)!(\#N - \#S - 1)!$ is the number of orderings in which

$$\underbrace{S} \quad i \quad \underbrace{N \backslash (S \cup \{i\}}.$$

- Thus,

$$\frac{(\#S)!(\#N - \#S - 1)!}{\#N!}$$

is the probability that exactly the members of S (in any ordering) are ahead of i, and i arrives just after all members of S (*i.e.*, just before $N \backslash (S \cup \{i\})$).

5.3.- El Valor de Shapley

- There are games $(N, v) \in G$ for which $Sh(N, v) \notin C(v) \neq \varnothing$ (remember the gloves game of the Introduction).

5.3.- El Valor de Shapley

- There are games $(N, v) \in G$ for which $Sh(N, v) \notin C(v) \neq \varnothing$ (remember the gloves game of the Introduction).

5.3.- El Valor de Shapley

- There are games $(N, v) \in G$ for which $Sh(N, v) \notin C(v) \neq \varnothing$ (remember the gloves game of the Introduction).

Theorem

(Shapley, 1969) Let $(N, v) \in G$ be a convex game. Then, $Sh(N, v) \in C(v)$.

5.3.- El Valor de Shapley

- Let $(N, v) \in G$, $S \subseteq N$ and $i \notin S$. Denote $D_i(v, S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

5.3.- El Valor de Shapley

- Let $(N, v) \in G$, $S \subseteq N$ and $i \notin S$. Denote $D_i(v, S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

5.3.- El Valor de Shapley

- Let $(N, v) \in G$, $S \subseteq N$ and $i \notin S$. Denote $D_i(v, S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

STRONG MONOTONICITY (SM) A value ϕ is *strong monotonic* if for all $(N, v), (N, u) \in G$ such that for all $S \subseteq N$ and all $i \notin S$, $D_i(v, S) \geq D_i(u, S)$ then, $\phi_i(v) \geq \phi_i(u)$.

5.3.- El Valor de Shapley

- Let $(N, v) \in G$, $S \subseteq N$ and $i \notin S$. Denote $D_i(v, S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

STRONG MONOTONICITY (SM) A value ϕ is *strong monotonic* if for all $(N, v), (N, u) \in G$ such that for all $S \subseteq N$ and all $i \notin S$, $D_i(v, S) \geq D_i(u, S)$ then, $\phi_i(v) \geq \phi_i(u)$.

Theorem

(Young, 1985) Let $v \in G$. Then, a value ϕ satisfies (SM), (SYM), *and* (EFF) *if and only if ϕ is the Shapley value.*

5.3.- El Valor de Shapley

- Let $(N, v) \in G$, $S \subseteq N$ and $i \notin S$. Denote $D_i(v, S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

STRONG MONOTONICITY (SM) A value ϕ is *strong monotonic* if for all $(N, v), (N, u) \in G$ such that for all $S \subseteq N$ and all $i \notin S$, $D_i(v, S) \geq D_i(u, S)$ then, $\phi_i(v) \geq \phi_i(u)$.

Theorem

(Young, 1985) Let $v \in G$. Then, a value ϕ satisfies (SM), (SYM), *and* (EFF) *if and only if ϕ is the Shapley value.*

- Young, H. P. "Monotonic Solutions of Cooperative Games," *International Journal of Game Theory* 14, 1985.

Reparto de costes

5.4.- Reparto de costes

Reparto de costes

- Consideramos una situación donde un conjunto de agentes (ciudades, familias, etc.) están considerando la posibilidad de construir unas instalaciones para proveer un servicio. El coste del cual depende del conjunto de los agentes que lo estén utilizando.

Reparto de costes

- Consideramos una situación donde un conjunto de agentes (ciudades, familias, etc.) están considerando la posibilidad de construir unas instalaciones para proveer un servicio. El coste del cual depende del conjunto de los agentes que lo estén utilizando.
- Sea $c : 2^N \to \mathbb{R}$ la función que describe esta situación: para cada $S \in 2^N$, $c(S)$ es el coste mínimo de proveer las instalaciones para todos los agentes en S.

Reparto de costes

- Consideramos una situación donde un conjunto de agentes (ciudades, familias, etc.) están considerando la posibilidad de construir unas instalaciones para proveer un servicio. El coste del cual depende del conjunto de los agentes que lo estén utilizando.
- Sea $c : 2^N \to \mathbb{R}$ la función que describe esta situación: para cada $S \in 2^N$, $c(S)$ es el coste mínimo de proveer las instalaciones para todos los agentes en S.
- Dado $c : 2^N \to \mathbb{R}$, definimos su función asociada característica $v_c : 2^N \to \mathbb{R}$, que describe *ahorro* $v_c(S)$ de cada coalición $S \in 2^N$ si sus miembros cooperan:

$$v_c(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S).$$

5.4.- Reparto de costes

Ejemplo 1 (Reparto de costes)

5.4.- Reparto de costes

Ejemplo 1 (Reparto de costes)

- Tres (relativamente pequeños) poblados ($N = \{1, 2, 3\}$) quieren construir una fabrica de tratamiento de agua para proveer con agua limpia a todos ciudadanos.

5.4.- Reparto de costes

Ejemplo 1 (Reparto de costes)

- Tres (relativamente pequeños) poblados ($N = \{1, 2, 3\}$) quieren construir una fabrica de tratamiento de agua para proveer con agua limpia a todos ciudadanos.
- Dados tamaños diferentes de los poblados y otras razones, el coste de construir la planta para cada coalición de poblados es:

$$\begin{aligned} c(\{1\}) &= 500 \\ c(\{2\}) &= 300 \\ c(\{3\}) &= 500 \\ c(\{1,2\}) &= 600 \\ c(\{1,3\}) &= 1000 \\ c(\{2,3\}) &= 700 \\ c(\{1,2,3\}) &= 1050. \end{aligned}$$

5.4.- Reparto de costes

Ejemplo 1 (Reparto de costes)

Ejemplo 1 (Reparto de costes)

- La función característica $v_c : 2^N \to \mathbb{R}$ asociada a c es:

$$
\begin{array}{ll}
c(\{1\}) = 500 & v_c(\{1\}) = 0 \\
c(\{2\}) = 300 & v_c(\{2\}) = 0 \\
c(\{3\}) = 500 & v_c(\{3\}) = 0 \\
c(\{1,2\}) = 600 & v_c(\{1,2\}) = 200 \\
c(\{1,3\}) = 1000 & v_c(\{1,3\}) = 0 \\
c(\{2,3\}) = 700 & v_c(\{2,3\}) = 100 \\
c(\{1,2,3\}) = 1050 & v_c(\{1,2,3\}) = 250.
\end{array}
$$

5.4.- Reparto de costes

Ejemplo 1 (Reparto de costes)

- La función característica $v_c : 2^N \to \mathbb{R}$ asociada a c es:

$$\begin{array}{ll} c(\{1\}) = 500 & v_c(\{1\}) = 0 \\ c(\{2\}) = 300 & v_c(\{2\}) = 0 \\ c(\{3\}) = 500 & v_c(\{3\}) = 0 \\ c(\{1,2\}) = 600 & v_c(\{1,2\}) = 200 \\ c(\{1,3\}) = 1000 & v_c(\{1,3\}) = 0 \\ c(\{2,3\}) = 700 & v_c(\{2,3\}) = 100 \\ c(\{1,2,3\}) = 1050 & v_c(\{1,2,3\}) = 250. \end{array}$$

- Es fácil de ver que v_c es superaditivo.

5.4.- Reparto de costes

Ejemplo 2 (Reparto de costes)

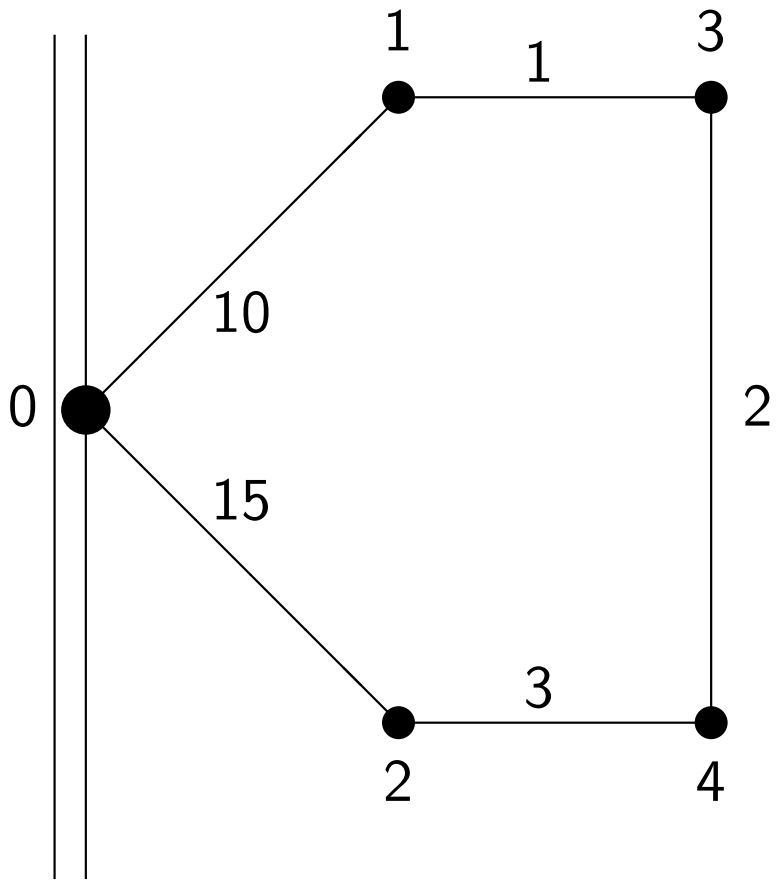
5.4.- Reparto de costes

Ejemplo 2 (Reparto de costes)

- Cuatro barrios ($N = \{1, 2, 3, 4\}$) de una pequeña urbanización consideran instalar en sus casas la fibra óptica de un fuente (denotado como 0). Los costes de instalación están representados en la siguiente figura, donde los números en los laterales representan el coste de conectar los nodos en sus extremos.

Ejemplo 2 (Reparto de costes)

Ejemplo 2 (Reparto de costes)



5.4.- Reparto de costes

$$
\begin{aligned}
c(1) &= 10 & v_c(1) &= 0 \\
c(2) &= 15 & v_c(2) &= 0 \\
c(3) &= 11 & v_c(3) &= 0 \\
c(4) &= 13 & v_c(4) &= 0 \\
c(12) &= 16 & v_c(12) &= 9 \\
c(13) &= 11 & v_c(13) &= 10 \\
c(14) &= 13 & v_c(14) &= 10 \\
c(23) &= 16 & v_c(23) &= 10 \\
c(24) &= 16 & v_c(24) &= 12 \\
c(34) &= 13 & v_c(34) &= 11 \\
c(123) &= 16 & v_c(123) &= 20 \\
c(124) &= 16 & v_c(124) &= 22 \\
c(134) &= 13 & v_c(134) &= 21 \\
c(234) &= 16 & v_c(234) &= 23 \\
c(1234) &= 16 & v_c(1234) &= 33
\end{aligned}
$$

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Reparto de Costes en general

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Reparto de Costes en general

- Sea $c : 2^N \to \mathbb{R}$ una función de costes y $v_c : 2^N \to \mathbb{R}$ sea su asociada función de costes; es decir,

$$v_c(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)).$$

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Reparto de Costes en general

- Sea $c : 2^N \to \mathbb{R}$ una función de costes y $v_c : 2^N \to \mathbb{R}$ sea su asociada función de costes; es decir,

$$v_c(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)).$$

- Consideramos un valor $\phi : G \to \mathbb{R}^n$.

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Reparto de Costes en general

- Sea $c : 2^N \to \mathbb{R}$ una función de costes y $v_c : 2^N \to \mathbb{R}$ sea su asociada función de costes; es decir,

$$v_c(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)).$$

- Consideramos un valor $\phi : G \to \mathbb{R}^n$.
- Obtenemos $\phi(v_c)$.

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Reparto de Costes en general

- Sea $c : 2^N \to \mathbb{R}$ una función de costes y $v_c : 2^N \to \mathbb{R}$ sea su asociada función de costes; es decir,

$$v_c(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)).$$

- Consideramos un valor $\phi : G \to \mathbb{R}^n$.
- Obtenemos $\phi(v_c)$.
- Prestamos atención que $\sum_{i \in N} \phi_i(v_c) = v_c(N)$.

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Reparto de Costes en general

- Sea $c : 2^N \to \mathbb{R}$ una función de costes y $v_c : 2^N \to \mathbb{R}$ sea su asociada función de costes; es decir,

$$v_c(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)).$$

- Consideramos un valor $\phi : G \to \mathbb{R}^n$.
- Obtenemos $\phi(v_c)$.
- Prestamos atención que $\sum_{i \in N} \phi_i(v_c) = v_c(N)$.
- En general, $\sum_{i \in N} \phi_i(v_c) \neq c(N)$.

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Reparto de Costes en general

- Sea $c : 2^N \to \mathbb{R}$ una función de costes y $v_c : 2^N \to \mathbb{R}$ sea su asociada función de costes; es decir,

$$v_c(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)).$$

- Consideramos un valor $\phi : G \to \mathbb{R}^n$.
- Obtenemos $\phi(v_c)$.
- Prestamos atención que $\sum_{i \in N} \phi_i(v_c) = v_c(N)$.
- En general, $\sum_{i \in N} \phi_i(v_c) \neq c(N)$.
- Para cada $i \in N$, definimos los *pagos*

$$x_i = c(\{i\}) - \phi_i(v_c).$$

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

- Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N} x_i &= \sum_{i\in N}(c\{i\}) - \phi_i(v_c)) && \text{por definición de } x_i \\
&= \sum_{i\in N} c\{i\} - v_c(N) && \text{por eficiencia de } \phi \\
&= \sum_{i\in N} c\{i\}) - \sum_{i\in N} c\{i\}) + c(N) && \text{por definición de } v_c(N) \\
&= c(N).
\end{aligned}$$

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

- Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N} x_i &= \sum_{i\in N} (c\{i\}) - \phi_i(v_c)) && \text{por definición de } x_i \\
&= \sum_{i\in N} c\{i\} - v_c(N) && \text{por eficiencia de } \phi \\
&= \sum_{i\in N} c\{i\}) - \sum_{i\in N} c\{i\}) + c(N) && \text{por definición de } v_c(N) \\
&= c(N).
\end{aligned}$$

- Por tanto, el vector $x = (x_i)_{i\in N}$ imputa a cada agente i un pago que tiene la propiedad que la suma de los pagos $\sum_{i\in N} x_i$ es igual al coste total de las instalaciones $c(N)$.

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Ejemplo 3

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Ejemplo 3 La depuradora.

$$
\begin{array}{ll}
c(\{1\}) = 500 & v_c(\{1\}) = 0 \\
c(\{2\}) = 300 & v_c(\{2\}) = 0 \\
c(\{3\}) = 500 & v_c(\{3\}) = 0 \\
c(\{1,2\}) = 600 & v_c(\{1,2\}) = 200 \\
c(\{1,3\}) = 1000 & v_c(\{1,3\}) = 0 \\
c(\{2,3\}) = 700 & v_c(\{2,3\}) = 100 \\
c(\{1,2,3\}) = 1050 & v_c(\{1,2,3\}) = 250.
\end{array}
$$

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Ejemplo 3 La depuradora.

$$
\begin{array}{ll}
c(\{1\}) = 500 & v_c(\{1\}) = 0 \\
c(\{2\}) = 300 & v_c(\{2\}) = 0 \\
c(\{3\}) = 500 & v_c(\{3\}) = 0 \\
c(\{1,2\}) = 600 & v_c(\{1,2\}) = 200 \\
c(\{1,3\}) = 1000 & v_c(\{1,3\}) = 0 \\
c(\{2,3\}) = 700 & v_c(\{2,3\}) = 100 \\
c(\{1,2,3\}) = 1050 & v_c(\{1,2,3\}) = 250.
\end{array}
$$

- $Sh(v_c) = (83{,}33, 133{,}33, 33{,}33)$.

5.4.- El Valor Shapley en Reparto de Costes

Ejemplo 3 La depuradora.

$$
\begin{array}{ll}
c(\{1\}) = 500 & v_c(\{1\}) = 0 \\
c(\{2\}) = 300 & v_c(\{2\}) = 0 \\
c(\{3\}) = 500 & v_c(\{3\}) = 0 \\
c(\{1,2\}) = 600 & v_c(\{1,2\}) = 200 \\
c(\{1,3\}) = 1000 & v_c(\{1,3\}) = 0 \\
c(\{2,3\}) = 700 & v_c(\{2,3\}) = 100 \\
c(\{1,2,3\}) = 1050 & v_c(\{1,2,3\}) = 250.
\end{array}
$$

- $Sh(v_c) = (83{,}33, 133{,}33, 33{,}33)$.
- Pagos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c(1) - Sh(v_c)_1 = 500 - 83{,}33 = 416{,}66 \\
x_2 &= c(2) - Sh(v_c)_2 = 300 - 133{,}33 = 166{,}66 \\
x_3 &= c(3) - Sh(v_c)_3 = 500 - 33{,}33 = 466{,}66.
\end{aligned}
$$