

Teoría de Juegos (Código: 102477)

Módulo 4: Equilibrio de Nash Equilibrium y Temas Relacionadas

Antonio Miralles

antonio.miralles@uab.cat

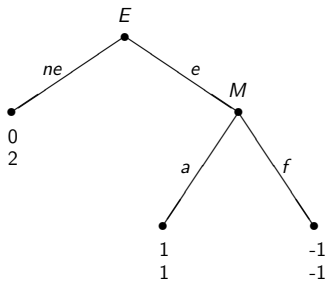
despacho B3-196

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

4.1.- Introducción

- Primero consideramos el equilibrio de Nash como una condición *necesaria* de racionalidad.
 - Preguntamos: ¿hay algunas pruebas más estrictas o algunas propiedades que hace una estrategia ser racional?
 - Este enfoque (de imponer los requisitos adicionales a las condiciones de Nash) se conoce como el programa de *perfeccionamiento* o *refinamiento* del conjunto de equilibrios de Nash.
 - Hay dos métodos de hacerlo (están relacionados, pero es más práctico considerarlos por separado):
 - refinamientos en la forma extensiva y
 - refinamientos en la forma normal.
 - Por ejemplo, en juegos en forma extensiva con información perfecta podemos seleccionar los equilibrios de Nash obtenidos por la inducción hacia atrás.

4.1.- Introducción



E/M	a	f
ne	0, 2	0, 2
e	1, 1	-1, -1

4.1.- Introducción

- Al final del Módulo 4 cambiaremos este punto de vista y consideraremos equilibrio de Nash como una condición *suficiente* del comportamiento racional (y no solo necesario).
 - Extendemos el conjunto de equilibrios de Nash (un comportamiento racionalizable).

4.2.- Estrategias dominantes

- Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal.

- **Definitions**

- s_i *domina estrictamente* s'_i si

$$h_i(s_i, s_{-i}) > h_i(s'_i, s_{-i})$$

para cada $s_{-i} \in S_{-i}$.

- s_i (*débilmente*) *domina* s'_i si

$$h_i(s_i, s_{-i}) \geq h_i(s'_i, s_{-i})$$

para cada $s_{-i} \in S_{-i}$, y existe $s'_{-i} \in S_{-i}$ tal que $h_i(s_i, s'_{-i}) > h_i(s'_i, s'_{-i})$.

4.2.- Estrategias dominantes: ejemplos

(1)

1/2	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	3, 3	0, 4
<i>D</i>	4, 0	1, 1

jugadores.

D domina estrictamente *C* para los dos

(2)

1/2	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	10, 0	5, 2
<i>B</i>	10, 1	2, 0

T domina *B* para el jugador 1.

4.2.- Estrategias dominantes: estrategias mixtas

- Importancia de utilizar estrategias mixtas.

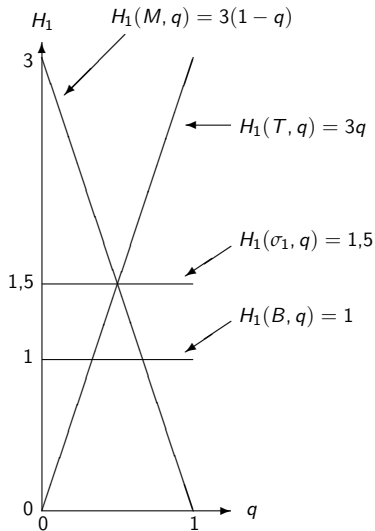
- **Ejemplo:**

	q	$1 - q$
$1/2$	L	R
T	3, 0	0, 1
M	0, 0	3, 1
B	1, 1	1, 0

- Ninguna estrategia (pura) domina ninguna otra estrategia (pura) para los dos jugadores.
- De todos modos, la estrategia mixta $\sigma_1(T) = \sigma_1(M) = \frac{1}{2}$ y $\sigma_1(B) = 0$ estrictamente domina B dado que para cada $q \in [0, 1]$,

$$H_1(\sigma_1, q) = 3q\frac{1}{2} + 3(1 - q)\frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 = H_1(B, q).$$

4.2.- Estrategias dominantes: estrategias mixtas



4.2.- Estrategias dominantes: estrategias mixtas

- **Definición** σ_i domina estrictamente σ'_i si

$$H_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > H_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$$

para cada $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$.

- **Definición '** σ_i estrictamente domina σ'_i si

$$H_i(\sigma_i, s_{-i}) > H_i(\sigma'_i, s_{-i})$$

para cada $s_{-i} \in S_{-i}$.

- **Fact** Definición y Definición' son equivalentes.
 - La aplicación de la Definición ' simplifica la prueba.

4.2.- Estrategias dominantes

• Definiciones

- s_i es una estrategia *estrictamente dominante* si para cada $s'_i \in S_i \setminus \{s_i\}$,

$$h_i(s_i, s_{-i}) > h_i(s'_i, s_{-i})$$

para cada $s_{-i} \in S_{-i}$. Es decir, s_i domina estrictamente todas las otras estrategias.

- s_i es una estrategia (*débilmente*) *dominante* si para cada $s'_i \in S_i$,

$$h_i(s_i, s_{-i}) \geq h_i(s'_i, s_{-i})$$

para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ y [condición (*)] existe $s'_{-i} \in S_{-i}$ tal que

$$h_i(s_i, s'_{-i}) > h_i(s'_i, s'_{-i}).$$

Es decir, [con la condición (*)] s_i domina (débilmente) todas las otras estrategias.

- En el Ejemplo (1), D es una estrategia estrictamente dominante.
- En el ejemplo (2), T es una estrategia dominante.

4.2.- Estrategias dominantes

- **Definición (forma normal)** Sea G un juego en forma normal. Decimos que $s^* \in S^*$ es un *equilibrio de estrategias estrictamente dominantes* de G si para cada $i \in I$, s_i^* es una estrategia estrictamente dominante.
- En el Ejemplo (1), (D, D) es un equilibrio en estrategias dominantes.
- En el Ejemplo (2), no hay equilibrios en estrategias dominantes: (T, R) es el único equilibrio de Nash, pero R no es una estrategia dominante para el jugador 2.
- Este concepto es el más sólido y menos polémico.
 - Esto transforma el juego (un problema de multi-agentes) en varios problemas de un agente.
 - Esto no requiere que el juego tenga conocimiento común; en particular, para computar una estrategia dominante un jugador no necesita saber los pagos de los otros jugadores.
 - De todas maneras, a menudo el conjunto de equilibrios en estrategias dominantes es vacío.

4.2.- Estrategias dominantes

- **Diseño de Mecanismos (o implementation theory):** Para seleccionar mecanismos para obtener un objetivo social. Formalmente, el juego no está dado, pero tiene que estar construido de tal manera que el conjunto de equilibrios tenga algunas propiedades; por ejemplo que el conjunto de equilibrios en estrategias dominantes no sea vacío y “que implemente” el objetivo social.
- **Ejemplos:**
 - Subastas.
 - Votación.
 - Decisión sobre bienes públicos.
 - Etc.

4.3- Eliminación de estrategias dominadas

- **Principio:** Nunca jugar una estrategia dominada.

- **Ejemplo:**

		1/2	L	R
(2)	T		10, 0	5, 2
	B		10, 1	2, 0

- Dos equilibrios de Nash: $S^* = \{(B, L), (T, R)\}$.
- T domina B para el jugador 1. El jugador 1 no debería jugar B .
- hemos refinado el conjunto S^* . Tenemos una única predicción: (T, R) .

4.3- Eliminación de estrategias dominadas

- De todas maneras ,

		1/2	L	R
(2')	T		10, 0	5, 2
	B		10, 11	2, 0

- $i(B, L)$ también es una predicción?

4.3- Eliminación de estrategias dominantes: Iterado

1/2	L	M	R
t	4, 3*	5, 1	6, 2
m	2, 1	8, 4	3, 6
b	3, 0	9, 6*	2, 6

4.3- Eliminación de estrategias dominantes: Iterado

1/2	L	M	R
t	4, 3	5, 1	6, 2
m	2, 1	8, 4	3, 6
b	3, 0	9, 6	2, 6

R domina $M \longrightarrow$

1/2	L	R
t	4, 3	6, 2
m	2, 1	3, 6
b	3, 0	2, 6

4.3- Eliminación de estrategias dominantes: Iterado

1/2	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
<i>t</i>	4, 3	5, 1	6, 2
<i>m</i>	2, 1	8, 4	3, 6
<i>b</i>	3, 0	9, 6	2, 6

R domina $M \longrightarrow$

1/2	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>t</i>	4, 3	6, 2
<i>m</i>	2, 1	3, 6
<i>b</i>	3, 0	2, 6

t domina m (o t domina b) $\longrightarrow$

1/2	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>t</i>	4, 3	6, 2

4.3- Eliminación de estrategias dominantes: Iterado

1/2	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
<i>t</i>	4, 3	5, 1	6, 2
<i>m</i>	2, 1	8, 4	3, 6
<i>b</i>	3, 0	9, 6	2, 6

R domina *M* $\longrightarrow$

1/2	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>t</i>	4, 3	6, 2
<i>m</i>	2, 1	3, 6
<i>b</i>	3, 0	2, 6

t domina *m* (or *t* domina *b*) $\longrightarrow$

1/2	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>t</i>	4, 3	6, 2

L domina *R* $\longrightarrow$

1/2	<i>L</i>
<i>t</i>	4, 3

- Ha sobrevivido un único equilibrio.
- ¿Es importante la ordenación de eliminación? - Sí.

4.3- Solucionable por dominación y Equilibrio sofisticado

- Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal.
 - También podemos definir una extensión mixta de G .
- Sea $A = \prod_{i \in I} A_i \subseteq S$ un conjunto de productos Cartesianos de S . Para cada $i \in I$ definimos

$$UD_i(A) = \{s_i \in A_i \mid \nexists s'_i \in A_i \text{ s.t. } s'_i \text{ dominates } s_i\}.$$

- Dado G , la eliminación sucesiva de las estrategias dominadas contiene dos secuencias: para cada $i \in I$,

$$S_i = S_i^0 \supseteq S_i^1 \supseteq \dots \supseteq S_i^t \supseteq S_i^{t+1} \supseteq \dots,$$

donde para cada $t \geq 0$,

$$S_i^{t+1} = UD_i(S^t).$$

4.3- Solucionable por dominación y Equilibrio sofisticado

- Sea $S_i^\infty = \bigcap_{t=0}^{\infty} S_i^t$.
- **Definición** Decimos que G es *solucionable por dominación* si
 - 1 $S^\infty \neq \emptyset$ y
 - 2 para cada $i \in I$, $h_i(s) = h_i(s')$ para cada $s, s' \in S^\infty$.
- El conjunto no-vacío S^∞ se llama el conjunto de *equilibrios sofisticados*.
- Moulin, H. "Dominance Solvable Voting Schemes," *Econometrica* 47, 1979.

4.3- Solucionable por dominación y Equilibrio sofisticado

1/2	L	M	R	$S_1^0 = \{t, m, b\}$	$S_2^0 = \{L, M, R\}$	
	t	4, 3	5, 1	6, 2	$S_1^1 = \{t, m, b\}$	$S_2^1 = \{L, R\}$
	m	2, 1	8, 4	3, 6	$S_1^2 = \{t\}$	$S_2^2 = \{L, R\}$
	b	3, 0	9, 6	2, 6	$S_1^3 = \{t\}$	$S_2^3 = \{L\}$
					...	...
				$S_1^\infty = \{t\}$	$S_2^\infty = \{L\}$	

- $S^\infty = \{(t, L)\}$ es el conjunto de equilibrios sofisticados .
- Observamos que ni t ni L son estrategias dominantes (no dominan ninguna estrategia).

4.3- Solucionable por dominación y Equilibrio sofisticado

Ejemplo (Adivinar la media).

- Cada jugador $i \in I$ elige simultáneamente un número entero x_i entre 1 y 999. Así, $S_i = \{1, \dots, 999\}$.
- Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{1, \dots, 999\}^n$, sea

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Los jugadores que han nombrado un número más cercano a $\frac{2}{3}\bar{x}$ ganan.
- Cada estrategia $x_i > 666$ está dominada por 666.
- Así, para cada $i \in I$, $S_i^1 = \{1, \dots, 666\}$.
- Ahora, para cada $i \in I$, $S_i^2 = \{1, \dots, 444\}$.
- Haciendo de esta manera para cada $i \in I$, $S_i^\infty = \{1\}$.

4.3- Solucionable por dominación y Equilibrio sofisticado

- **Comentario 1** Tenemos un gran problema con existencia.

<i>M/W</i>	<i>F</i>	<i>B</i>	<i>Home</i>
<i>F</i>	3, 1	0, 0	-1, -1
<i>B</i>	0, 0	1, 3	-1, -1
<i>Casa</i>	-1, -1	-1, -1	-1, -1

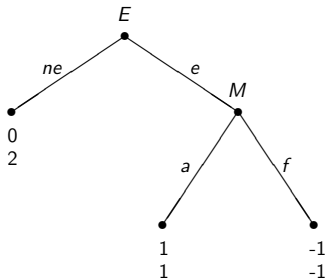
Casa está dominada, y la Batalla de Sexos (versión original) no tiene solución dominante.

- **Comentario 2** Podíamos eliminar solo estrategias estrictamente dominadas, pero entonces, el problema de existencia sería peor.
- Volveremos a este tema relacionándolo con Equilibrio perfecto de subjuego y estrategias racionalizables.

4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- Selten, R. "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit," *Zeitschrift für die gesamte Saatswissenschaft* 12, 1965.
- Refinamiento en forma extensiva.

- **Idea:**



- Dos equilibrios de Nash: (ne, f) , (e, a) .

4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- Consideramos el equilibrio de Nash (ne, f) .
- ... y el teléfono llama: ¡Monopolista, es tu turno!
- el conjunto de información de M está fuera del camino de equilibrio.
 - Jugar f era un parte del comportamiento óptimo porque a su conjunto de información no llegaba.
 - La amenaza de jugar f es lo que lo hace óptimo jugar ne para el entrante.
 - Pero, f no es una amenaza fiable, entonces E no debería de creer que M jugará f (no es racional para él) si el juega e .
 - Equilibrio Perfecto de Subjuego requiere comportamiento racional en todos los conjuntos de información, incluso en los que no están conseguidos durante el juego (el equilibrio no debería estar basado en las amenazas no fiables).
- Obtenemos (e, a) como el único Equilibrio Perfecto de Subjuego (que coincide con el equilibrio obtenido por la inducción hacia atrás).

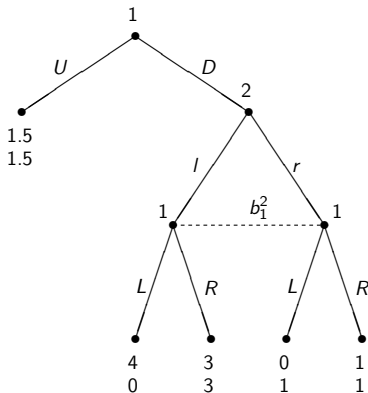
4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

E/M	a	f
ne	0, 2	0, 2
e	1, 1	-1, -1

- (e, a) se podría obtener también en la forma normal aplicando el principio de “nunca jugar una estrategia dominada” dado que f está dominado por a .
- Pero esto no es siempre verdad.

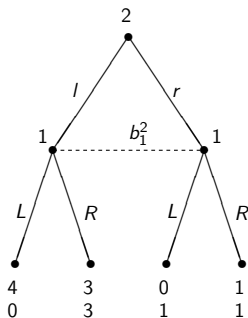
4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

Ejemplo



4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- $((U, R), r)$ es un equilibrio de Nash.
- Inducción hacía atrás no se puede utilizar para eliminarlo, pero si el jugador 2 cree que el jugador 1 jugará R , entonces el 2 debería jugar l en lugar de r .
- Lo que es importante es que el subjuego se ve como un juego, y (r, R) no es un equilibrio de Nash del subjuego.



4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- Sea $\Gamma = ((I, N), K, P, B, C, p, u)$ un juego en forma extensiva .
- Dado $x \in X$, sea $F(x)$ el conjunto de los nodos seguidores x ; *i.e.*,

$$F(x) = \{y \in X \cup Z \mid x \in [x_1, y]\}.$$

- Decimos que $F(x)$ es un sub árbol de K , y lo denotamos como K_x , si:
 - $\{x\} \in B_i$ para algún $i \in I \cup \{N\}$; es decir, el conjunto de información que contiene x consiste de un elemento solo.
 - Para cada $x' \in F(x)$

$$x' \in b_j \implies b_j \subseteq F(x);$$

es decir, cada nodo que sigue x pertenece al conjunto de información que contiene solo nodos $F(x)$.

- Las dos condiciones mencionados aseguran que todos los conjuntos de información o se contienen en K_x o están desconectados con K_x .
- Dado $x \in X$, el subjuego Γ_x es la restricción de Γ en el sub árbol K_x .

3.4.- Estrategias de comportamiento

- Sea $\Gamma = ((I, N), K, P, B, C, p, u)$ un juego finito en forma extensiva con información imperfecta y sea $G_\Gamma^* = (I, (\Sigma_i)_{i \in I}, (H_i)_{i \in I})$ la extensión mixta de su juego asociado en forma normal $G_\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$.
- Fijamos $i \in I$. Una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es una distribución de probabilidad en el conjunto

$$S_i = \left\{ s_i : B_i \longrightarrow \bigcup_{b \in B_i} C_b \mid \text{for all } b \in B_i, s_i(b) \in C_b \right\}.$$

- Es decir, $\Sigma_i = \mathcal{L}(S_i)$, donde dado cualquier conjunto finito T , $\mathcal{L}(T)$ es el conjunto de distribuciones de probabilidad en T .
- Hay un enfoque equivalente (y más simple): estrategias de comportamiento.

3.4.- Información Imperfecta: estrategias de comportamiento

- Dado Γ y $i \in I$, definimos el conjunto de estrategias de comportamiento como

$$\hat{\Sigma}_i = \left\{ \hat{\sigma}_i : B_i \longrightarrow \bigcup_{b \in B_i} \mathcal{L}(C_b) \mid \text{para cada } b \in B_i, \hat{\sigma}_i(b) \in \mathcal{L}(C_b) \right\}.$$

- **Teorema de Kuhn:** Los dos enfoques son equivalentes.
- **Comentario:** Cada estrategia (pura) $s_i \in S_i$ simultáneamente pertenece a Σ_i y $\hat{\Sigma}_i$.
- Sea $\sigma_i \in \Sigma_i$, $\hat{\sigma}_i \in \hat{\Sigma}_i$ y este $s_{-i} \in S_{-i}$ dado. Para cada $z \in Z$, $p(z \mid \sigma_i, s_{-i})$ denota la probabilidad de z si está jugada (σ_i, s_{-i}) ; y $\hat{p}(z \mid \hat{\sigma}_i, s_{-i})$ denota la probabilidad de z si está jugada $(\hat{\sigma}_i, s_{-i})$.

3.4.- Información Imperfecta: estrategias de comportamiento

Definición Decimos que $\sigma_i \in \Sigma_i$ y $\hat{\sigma}_i \in \hat{\Sigma}_i$ son *equivalentes* si para cada $s_{-i} \in S_{-i}$,

$$p(z \mid \sigma_i, s_{-i}) = \hat{p}(z \mid \hat{\sigma}_i, s_{-i})$$

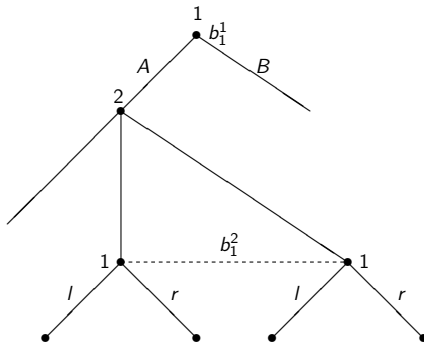
para cada $z \in Z$.

Theorem

Kuhn, 1953. Sea Γ un juego finito en forma extensiva con información imperfecta y memoria perfecta. Entonces, Σ_i y $\hat{\Sigma}_i$ son equivalentes.

3.4.- Información Imperfecta: Ejemplo

Ejemplo:



3.4.- Estrategias de comportamiento: ejemplo

- $S_1 = \{Al, Ar, Bl, Br\}$.



$$\sigma_1(Al) = 0,3$$

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(A) = 0,3 + 0,2 = 0,5$$

$$\sigma_1(Ar) = 0,2$$

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(B) = 0,5$$

$$\sigma_1(Bl) = 0$$

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(l) = \frac{0,3}{0,3+0,2} = 0,6$$

$$\sigma_1(Br) = 0,5$$

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(r) = \frac{0,2}{0,3+0,2} = 0,4$$

3.4.- Estrategias de comportamiento: ejemplo

- $S_1 = \{Al, Ar, Bl, Br\}.$



$$\sigma_1(Al) = 0$$

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(A) = 0$$

$$\sigma_1(Ar) = 0$$

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(B) = 1$$

$$\sigma_1(Bl) = 0,25$$

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(l) = x$$

$$\sigma_1(Br) = 0,75$$

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(r) = 1 - x$$

donde $x \in [0, 1]$; por ejemplo, $x = 0,25$.

3.4.- Estrategias de comportamiento: ejemplo

- $S_1 = \{Al, Ar, Bl, Br\}$.
- Sea $\sigma_1(Al) = t_1$, $\sigma_1(Ar) = t_2$, $\sigma_1(Bl) = t_3$ y $\sigma_1(Br) = t_4$ tal que $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$ y $t_j \geq 0$ para cada $j = 1, 2, 3, 4$.
- Queremos construir un equivalente estrategia de comportamiento $\hat{\sigma}_1 = (q_1, q_2)$ donde $q_1 = \hat{\sigma}_1(b_1^1)(A)$ y $q_2 = \hat{\sigma}_1(b_1^2)(I)$.
- Para cada $b \in B_1$ definimos

$$R(b) = \{s_1 \in S_1 \mid \exists s_2 \text{ s.t. } b \text{ está conseguido cuando } (s_1, s_2) \text{ está jugado}\}$$

3.4.- Información Imperfecta: Ejemplo

- Primero consideramos el conjunto de información b_1^1 . Entonces, $R(b_1^1) = S_1$.
- Por lo tanto, $\sigma_1(s_i) > 0$ para algunas $s_i \in R(b_1^1)$. Así,

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(A) = \frac{\sum_{\{s_i \in S_1 | s_i(b_1^1)=A\}} \sigma_i(s_i)}{\sum_{s_i \in S_1} \sigma_i(s_i)} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = t_1 + t_2.$$

- De manera similar,

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(B) = \frac{\sum_{\{s_i \in S_1 | s_i(b_1^1)=B\}} \sigma_i(s_i)}{\sum_{s_i \in S_1} \sigma_i(s_i)} = \frac{t_3 + t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = t_3 + t_4.$$

3.4.- Información Imperfecta: Ejemplo

- Ahora consideramos el conjunto de información b_1^2 . Tenemos en cuenta que $R(b_1^2) = \{Al, Ar\}$.
- Asumimos primero que o $t_1 > 0$ o $t_2 > 0$. Entonces,

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(l) = \frac{\sum_{\{s_i \in R(b_1^2) | s_i(b_1^2)=l\}} \sigma_i(s_i)}{\sum_{s_i \in R(b_1^2)} \sigma_i(s_i)} = \frac{t_1}{t_1 + t_2}.$$

3.4.- Información Imperfecta: Ejemplo

y

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(r) = \frac{\sum_{\{s_i \in R(b_1^2) | s_i(b_1^2)=r\}} \sigma_i(s_i)}{\sum_{s_i \in R(b_1^2)} \sigma_i(s_i)} = \frac{t_2}{t_1 + t_2}.$$

- Asumimos ahora que $t_1 = 0$ y $t_2 = 0$. Entonces,

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(l) = \sum_{\{\bar{s}_i \in S_i | \bar{s}_i(b_1^2)=l\}} \sigma_i(\bar{s}_i) = t_1 + t_3$$

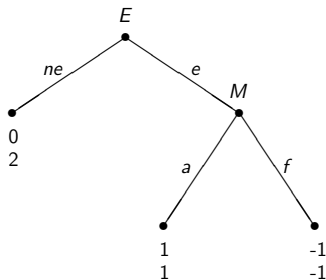
y

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(r) = \sum_{\{\bar{s}_i \in S_i | \bar{s}_i(b_1^2)=r\}} \sigma_i(\bar{s}_i) = t_2 + t_4.$$

4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- Sea $\sigma \in \hat{\Sigma}$ una estrategia de comportamiento en Γ , sea $x \in X$ y consideramos Γ_x . Entonces, σ se puede descomponer como (σ^x, σ^{-x}) donde σ^x describe el comportamiento en Γ_x y σ^{-x} en $\Gamma_{-x} = \Gamma \setminus \Gamma_x$.
- **Definición** Sea Γ un juego en forma extensiva. La estrategia de comportamiento $\hat{\sigma} \in \Sigma$ es un *Equilibrio Perfecto de Subjuego* (SPE) de Γ si para cada posible subjuego Γ_x , la restricción de σ en Γ_x , σ^x , es un equilibrio de Nash de Γ_x .
- Notamos que Γ es un subjuego también ($\Gamma = \Gamma_{x_1}$ dado que $x_1 \in X$). Así, para cada Γ , $\text{SPE} \subseteq \text{NE}$.

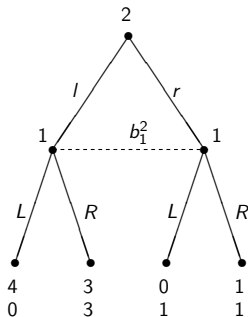
4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego



- Dos equilibrios de Nash: (ne, f) , (e, a) .
- (e, a) es el único SPE de Γ y (ne, f) no es un SPE dado que f no es un equilibrio de Nash del subjuego que empieza en el único nodo que pertenece a M .

4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- $((U, R), r)$ no es un SPE del segundo ejemplo dado que (R, r) no es un equilibrio de Nash del subjuego.



4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- **Hecho:** Sea Γ un juego finito en forma extensiva con información perfecta. Entonces,

$$\text{SPE (es estrategias puras)} = \bar{S}^* \neq \emptyset.$$

Theorem

Selten (1965) Cada juego finito en forma extensiva Γ tiene por lo menos un SPE (no es necesario que sea en estrategias puras).

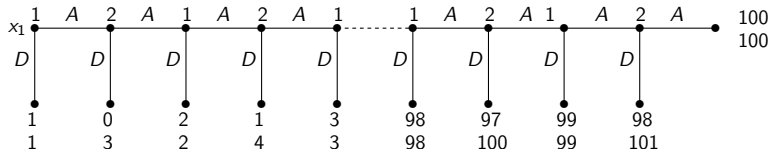
- **Prueba (idea):** Aplicamos el argumento de la inducción hacia atrás en todos posibles subjuegos y aplicamos el Teorema de Nash-Kuhn para obtener un equilibrio de Nash. La estrategia de comportamiento obtenida así es un SPE de Γ .

4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- **Comentario 1** Hay juegos Γ tal que $SPE \subsetneq NE$.
- **Comentario 2** Hay juegos tal que $SPE = NE$.
- **Comentario 3** Si σ es el único NE de Γ entonces σ es también un SPE de Γ .

4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- Juego Centipede de Rosenthal (*JET*, 1981).



- Único SPE: "Siempre D ."
- Predicción mala.
- Problema: la racionalidad completa (como conocimiento común).

4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- La perfección de subjuego requiere 200 pasos de la inducción hacia atrás y por lo tanto, 200 iteraciones de que “el jugador 1 sabe que el jugador 2 sabe que el jugador 1 ... sabe que el jugador 2 es racional.”
- Racionalidad $\implies$ SPE. Pero supongamos que yo, el jugador 2, estoy seguro que el 1 es racional y que él sabe que yo soy racional.
 - Y supongamos que el jugador 1 elige A .
 - Entonces, mi hipótesis inicial (el jugador 1 es racional) no es correcta pero para justificar D tengo que creer ex-post que mi hipótesis (incorrecta) aún se cumple.
 - Al final, el jugador 1 no es racional (él ha jugado D): probamos A .
 - Ahora, yo puedo ponerme en la posición del jugador 1 y enterarme que el jugador 2 (ya) puede aplicar el argumento anterior, y, por tanto, pruebe A y esperar que pasará.

4.4- Equilibrio Perfecto de Subjuego

- En general, SPE requiere dos cosas:
 - 1 SPE da una solución (en todos subjuegos), aunque en subjuegos donde la solución dice que no llegaremos (los conjuntos de información con probabilidad cero).
 - 2 SPE impone comportamiento racional en todo, incluso en los subjuegos del juego donde el SPE dice que no serán conseguidos. En los subjuegos que están fuera de equilibrio, la “solución” no está aceptada, los jugadores evalúan sus acciones tomando el comportamiento de otros jugadores como dado, que era demostrado como incorrecto porque hablamos de subjuegos fuera del equilibrio.

4.5- Comportamiento Estratégico Racionalizable

- Bernheim, B. "Rationalizable Strategic Behavior," *Econometrica* 53 (1984). [Normal Form].
- Pearce, D. "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection," *Econometrica* 52 (1984). [Extensive Form].
- No es un refinamiento.
- Incertidumbres estratégicas: el enfoque Bayesiano al problema de la selección estratégica.
- La idea es encontrar las restricciones del comportamiento de los jugadores que viene de la hipótesis de racionalidad (y conocimiento común sobre esto).

4.5- Comportamiento Estratégico Racionalizable

- El punto de vista del enfoque de refinamiento (por ejemplo, el principio de “nunca jugar estrategia dominada”): ¿Cuáles estrategias no serán jugadas por un jugador racional?
- El punto de inicio de racionalizabilidad es una cuestión complementaria: ¿Cuál es el conjunto de estrategias que un jugador racional jugaría?
 - Respuesta: un jugador racional jugará *solo* las estrategias que son las mejores respuestas a algunas creencias sobre las estrategias de los otros jugadores. En cambio, un jugador racional nunca jugará una estrategia que nunca es la mejor respuesta a sus creencias.
- Además, el conocimiento común de la racionalidad implica que no todas las creencias sobre el comportamiento de otros jugadores sean posibles.
- Esto significa que tenemos un proceso infinito de razonamiento. Lo construimos.

4.5- Comportamiento Estratégico Racionalizable

- Sea $G^* = (I, (\Sigma_i)_{i \in I}, (H_i)_{i \in I})$ una extensión mixta de un juego finito en forma normal G .
- Notación: Dado $X \subseteq \mathbb{R}^m$, el *envolvente convexo* de X , denotado por $\text{co}(X)$, es el mínimo conjunto convexo que contiene X . Además

$$\text{co}(X) = \bigcap_{X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^m: Y \text{ es convexo}} Y.$$

- **Definición** Definimos para cada $i \in I$, $\Sigma_i^0 = \Sigma_i$ y recursivamente, para cada $t \geq 0$,

$$\Sigma_i^{t+1} = \{\sigma_i \in \Sigma_i^t \mid \exists \sigma_{-i} \in \prod_{j \neq i} \text{co}(\Sigma_j^t) \text{ s.t.}$$

$$H_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq H_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \ \forall \sigma'_i \in \Sigma_i^t\}.$$

- Es decir, σ_i es una mejor respuesta a la creencia de i $\prod_{j \neq i} \text{co}(\Sigma_j^t)$.
- ¿Por qué $\text{co}(\Sigma_j^t)$ en lugar de Σ_j^t ?

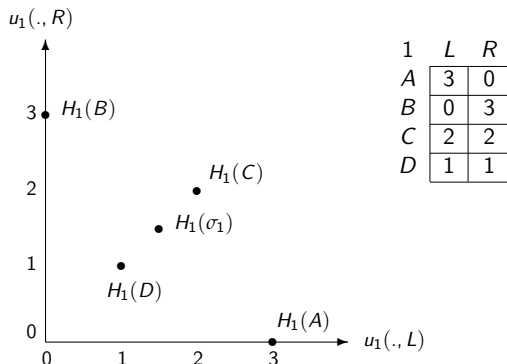
4.5- Comportamiento Estratégico Racionalizable

- El conjunto de *estrategias racionalizables* para el jugador i es

$$R_i = \bigcap_{t=0}^{\infty} \Sigma_i^t.$$

- Un perfil de estrategias $\sigma \in \Sigma$ es *racionalizable* si $\sigma_i \in R_i$ para cada $i \in I$.
- **Ejemplo** (¿Por qué $co(\Sigma_j^t)$ en lugar de Σ_j^t ?)
 - Es posible que $\sigma'_j, \sigma''_j \in \Sigma_j^t$ pero la mixta $\frac{1}{2}\sigma'_j + \frac{1}{2}\sigma''_j \notin \Sigma_j^t$ (la creencia que el jugador j jugará σ'_j con probabilidad $\frac{1}{2}$ y σ''_j con probabilidad $\frac{1}{2}$).

4.5- Comportamiento Estratégico Racionalizable



- La estrategia $\sigma_1(A) = \sigma_1(B) = \frac{1}{2}$ está dominada por C. Así, $\sigma_1 \notin \Sigma_1^1$ pero dado que $\sigma_1', \sigma_1'' \in \Sigma_1^1$, donde $\sigma_1'(B) = \sigma_1''(A) = 1$, y queremos que en Σ_1^1 la creencia “con alguna probabilidad, 1 jugará A u la probabilidad complementaria, 1 jugará B”; así, tenemos $co(\Sigma_j^t)$ en la definición.

4.5- Comportamiento Estratégico Racionalizable

- **Comentario 1** Si σ es un equilibrio de Nash de G , así, σ es racionalizable.
 - Observamos que para cada $t \geq 0$ y cualquier $i \in I$, $\sigma_i \in \Sigma_i^t$ y por tanto, $\sigma_i \in R_i$.
 - Así, $R \neq \emptyset$ para cada finito G (dad que el conjunto de equilibrios de Nash que pertenecen a R).
 - Racionalizabilidad no es un refinamiento. Es una ampliación del conjunto de soluciones.
 - Por ejemplo, en la Batalla de Sexos, $(F, B), (B, F) \in R$.
- **Comentario 2** Si $\#I = 2$, así, R coincide con el conjunto de estrategias que sobreviven la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas (como en Moulin (*Econometrica*, 1979) para definir equilibrio sofisticado, pero ahora solo estrategias *estrictamente* dominadas están eliminadas).
 - Pearce (1984) lo comprueba basando en el Teorema Minimax.
 - En general, para $\#I > 2$, esto no se cumple.