Teoría de Juegos (Código: 102477)

Módulo 3: Juegos en Forma Extensiva

Antonio Miralles

antonio.miralles@uab.cat

despacho B3-196

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

3.1.- Preliminares

- **El objetivo:** Tener un modelo menos abstracto que represente las reglas de juegos (la estructura dinámica del proceso de decisión) y ser capaz de predecir el comportamiento de los jugadores:
  - ¿Quién juega?
  - ¿Cuál es el orden?
  - ¿Qué puede hacer un jugador durante el juego?
  - ¿Qué sabe un jugador sobre el juego y las acciones de los otros jugadores?

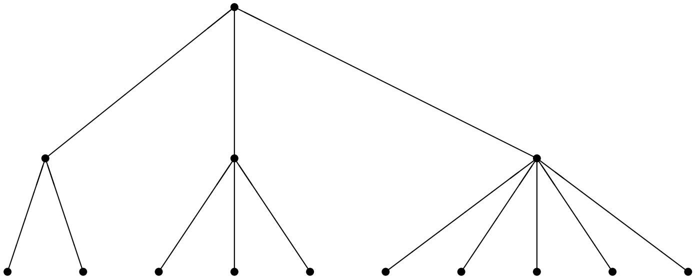
3.1.- Preliminares

- **Dos modelos:**
  - Juegos en Forma Extensiva con Información Perfecta (sin ninguna incertidumbre, es decir, la última pregunta tiene una respuesta: 'lo sabe todo').
  - Juegos en Forma Extensiva con Información Imperfecta (con incertidumbre: o la naturaleza del juego es desconocida, o las acciones anteriores de otros jugadores).

3.2.- Información Perfecta: definición

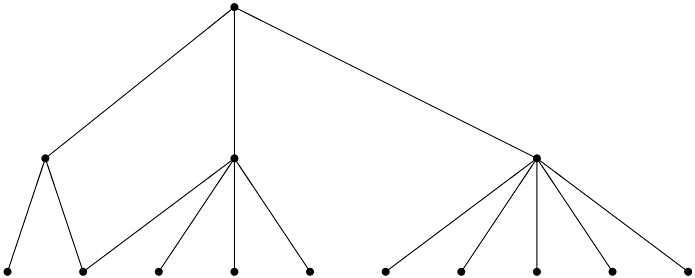
- Un *Juego en Forma Extensiva con Información Perfecta* es un quintuplet $\Gamma = (I, K, P, C, u)$ donde:
- $I = \{1, ..., n\}$ es el conjunto finito de *jugadores*.
- K es un *árbol* que describe la estructura y el orden del proceso de tomar decisiones. El árbol es un conjunto finito de nodos conectados, tal que para cada par de nodos existe un único camino que les conecta. El conjunto de nodos se puede dividir entre:
  - El conjunto X de nodos *no-terminales* (con un nodo inicial $x_1 \in X$, que indica donde se empieza el juego.
  - El conjunto Z de nodos *terminales*.

3.2.- Información Perfecta: un árbol



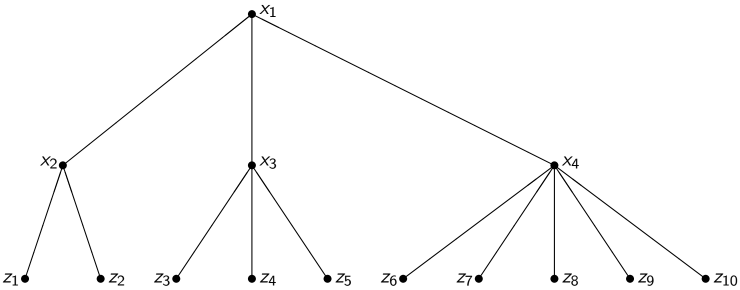
Un Árbol

3.2.- Información Perfecta: un árbol



No es un Árbol

3.2.- Información Perfecta: un árbol



$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $Z = \{z_1, ..., z_{10}\}$

3.2.- Información Perfecta: un árbol

- Un árbol (con su conjunto de nodos $X \cup Z$) puede ser descrito por la función (asignación) de *seguidores inmediatos (immediately followers)*, IF, que asigna a cada nodo no-terminal $x \in X$ un conjunto de nodos $IF(x) \subset X \cup Z$ que siguen inmediatamente después del nodo.

- Esta asignación tiene que tener una propiedad que para cada par de distintos nodos $x, x' \in X$, $IF(x) \cap IF(x') = \emptyset$; *i.e.*,
  - el árbol no tiene bucles, es decir
  - para cada $y \in X \cup Z \backslash \{x_1\}$, existe un nodo único $x \in X$ tal que $y \in IF(x)$.

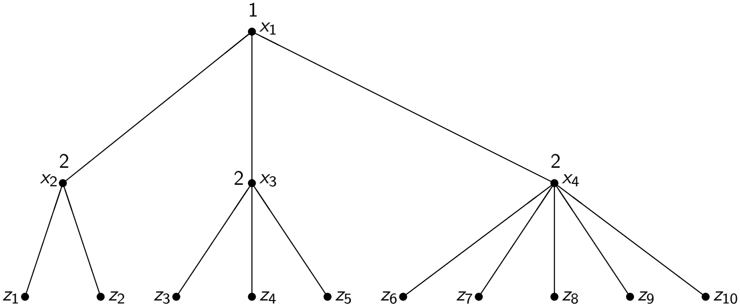
- En el ejemplo,
  - $IF(x_1) = \{x_2, x_3, x_4\}$.
  - $IF(x_2) = \{z_1, z_2\}$.
  - $IF(x_3) = \{z_3, z_4, z_5\}$.
  - $IF(x_4) = \{z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}\}$.

3.2.- Información Perfecta: partición

Juegos en Forma Extensiva con Información Perfecta $\Gamma = (I, K, P, C, u)$.

- P es una partición de X, el conjunto de nodos no-terminales de K. Para cada $x \in X$ asociamos un único jugador de I, el que toma la decisión en x. Formalmente, $P = \{X_1, ..., X_n\}$ tal que $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ y para cada $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \varnothing$.
- También podemos representar $P = \{X_1, ..., X_n\}$ como una función $P : X \longrightarrow I$, donde para cada $i \in I$, $X_i = \{x \in X \mid P(x) = i\}$.
- **Ejemplo:**
  - $I = \{1, 2\}$.
  - $X_1 = \{x_1\}$.
  - $X_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$.

3.2.- Información Perfecta: partición

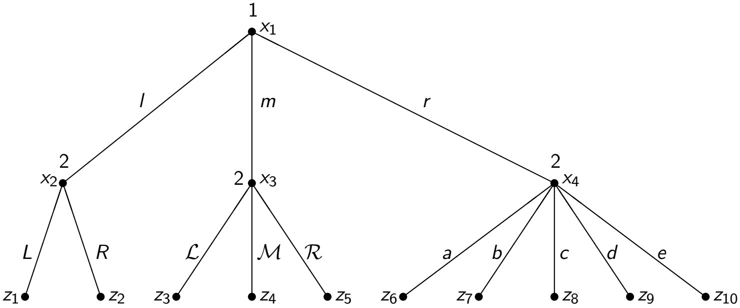


$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ and $Z = \{z_1, ..., z_{10}\}$

3.2.- Información Perfecta: elecciones

- C es la familia de conjuntos de elecciones, un conjunto para cada nodo no-terminal $x \in X$: $C = \{C_x\}_{x \in X}$.
- Para cada nodo no-terminal $x \in X$, C_x es el conjunto de posibles acciones (o elecciones) disponibles para el jugador $P(x)$ en x.
- **Ejemplo:**
  - $C_{x_1} = \{l, m, r\}$.
  - $C_{x_2} = \{L, R\}$.
  - $C_{x_3} = \{\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{R}\}$.
  - $C_{x_4} = \{a, b, c, d, e\}$.

3.2.- Información Perfecta: partición



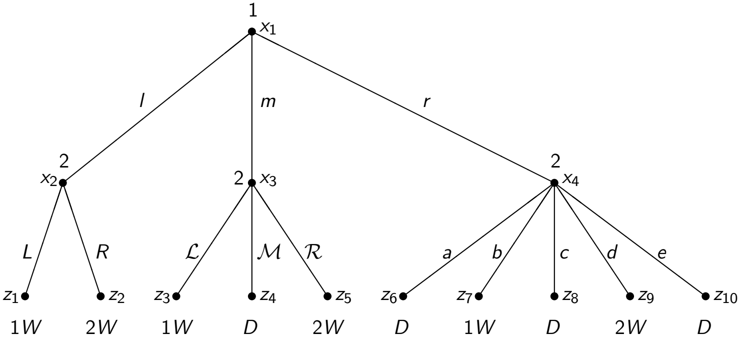
3.2.- Información Perfecta: consistencia, jugadas y resultados

- Consistencia: para cada nodo no-terminal $x \in X$, tenemos una asociación de C_x a $IF(x)$ (identificamos C_x con $IF(x)$). En particular, para cada $x \in X$, $|C_x| = |IF(x)|$.
- Una jugada es una secuencia de elecciones (o nodos) de x_1 hasta el nodo terminal ; *i.e.*, un juego es una secuencia de nodos en K

$$\{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$$

tal que $x^1 = x_1$, $x^k \in Z$ y $x^t \in IF(x^{t-1})$ para cada $1 < t \leq k$.
- para cada nodo terminal $z \in Z$ asociamos un resultado del juego $f : Z \longrightarrow A$.
- **Ejemplo:**
  - $A = \{1W, D, 2W\}$.
  - Una jugada: $\{x_1, x_2, z_2\}$; es decir, el jugador 1 en x_1 ha jugado I y el jugador 2 en x_2 ha jugado R.

3.2.- Información Perfecta: jugadas y resultados



3.2.- Información Perfecta: pagos

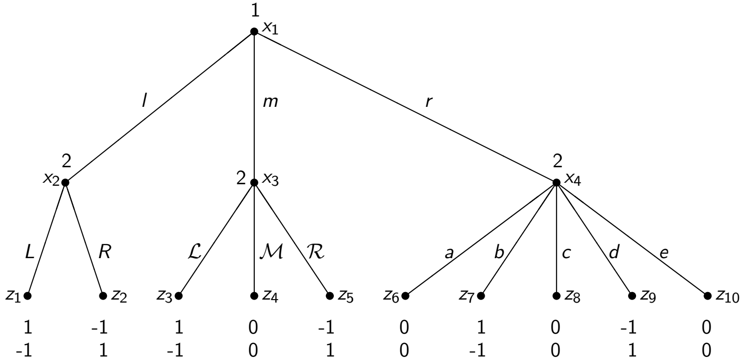
- Cada jugador $i \in I$ tiene un pre-orden completo $\succeq_i$ sobre A, representado por una función de utilidad vNM $\hat{u}_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Con un abuso de notación, asumimos que las preferencias y la función vNM de utilidad está definida en el conjunto de los nodos terminales ; es decir, dado $\hat{u}_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : Z \longrightarrow A$ definimos $u_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ en la siguiente manera: para cada $z \in Z$,

$$u_i(z) = \hat{u}_i(f(z)).$$

- Así, podemos asociar cada nodo terminal con los pagos de los jugadores (el vector de las utilidades).

- **Ejemplo:** asumimos que
  - $\hat{u}_1(1W) = 1 > \hat{u}_1(D) = 0 > -1 = \hat{u}_1(2W)$ y
  - $\hat{u}_2(2W) = 1 > \hat{u}_2(D) = 0 > -1 = \hat{u}_2(1W)$.



1
x_1
l
m
r
2
x_2
2
x_3
2
x_4
L
R
$\mathcal{L}$
$\mathcal{M}$
$\mathcal{R}$
a
b
c
d
e
z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9 z_{10}
1 -1 1 0 -1 0 1 0 -1 0
-1 1 -1 0 1 0 -1 0 1 0

3.2.- Información Perfecta: estrategias

- **Objetivo:** Describir todos los posibles comportamientos de los jugadores en un juego en forma extensiva con la información perfecta $\Gamma = (I.K, P, C, u)$.

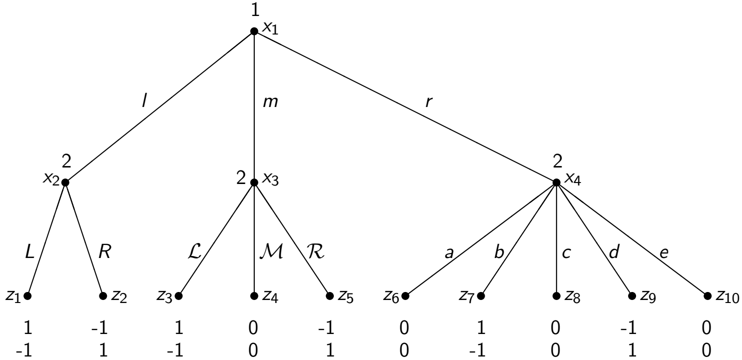
- Una estrategia del jugador i en Γ especifica para cada nodo $x \in X_i$ una elección sobre C_x. Formalmente,

Definición Sea $\Gamma = (I, K, P, C, u)$ un juego en forma extensiva con información perfecta. Una *estrategia* para el jugador i es una función

$$s_i : X_i \longrightarrow \bigcup_{x \in X_i} C_x$$

con la propiedad que para cada $x \in X_i$, $s_i(x) \in C_x$.

- Dado Γ, sea S_i el conjunto de todas estrategias del jugador i. Sea $S = \prod_{i \in I} S_i$ el conjunto de perfiles de estrategias de Γ.



$s_1(x_1) = l$, $s_2(x_2) = L$, $s_2(x_3) = \mathcal{L}$, $s_2(x_4) = a$,
$s'_1(x_1) = r$, $s'_2(x_2) = L$, $s'_2(x_3) = \mathcal{M}$, $s'_2(x_4) = b$,

3.2.- Información Perfecta: estrategias

- **Objetivo:** Para extender el vector de utilidades de los nodos terminales (resultados) hasta perfiles de estrategias.
- Un perfil de estrategias $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ induce una única jugada del juego (un único camino del nodo inicial hasta un nodo terminal) y por tanto, es un único vector de utilidades.
- **Ejemplo**
  - $(s_1, s_2) \in S$ induce el camino (l, L) y el nodo terminal z_1.
  - $(s_1, s_2') \in S$ también induce el camino (l, L) y el nodo terminal z_1.
  - $(s_1', s_2) \in S$ induce el camino (r, a) y el nodo terminal z_6.
  - $(s_1', s_2') \in S$ induce el camino (r, b) y el nodo terminal z_7.

3.2.- Información Perfecta: pagos

- Dado Γ, sea $a : S \longrightarrow Z$ la función que asigna a cada perfil de estrategias s el único nodo terminal inducido por s. Es decir, dado s, el $\bar{K}-$camino se puede describir de la manera siguiente:
  - $s_{P(x_1)}(x_1) = x^1$,
  - $s_{P(x^1)}(x^1) = x^2$, para cada $2 \leq k < \bar{K}$ dado x^k
  - $s_{P(x^k)}(x^k) = x^{k+1}$, y dado $x^{\bar{K}-1}$
  - $s_{P(x^{\bar{K}-1})}(x^{\bar{K}-1}) = z$.
  - Entonces, $a(s) = z$.

- **Pagos:** Sea $\Gamma = (I, K, P, C, u)$ dado. Para cada $i \in I$ definimos la **función de utilidad** del jugador i, $h_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente: para cada $s \in S$,

$$h_i(s) = u_i(a(s)).$$

- **Ejemplo:** $h(s) = h(s_1, s_2') = h(s') = (1,\text{-}1)$ y $h(s_1', s_2) = (0, 0)$.

3.3.- Equilibrio de Nash

- **Comentario:** Dado un juego en forma extensiva con información perfecta $\Gamma = (I, K, P, C, u)$, podemos definir su conjunto de perfiles de estrategias S y sus funciones de pagos $h : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Así, podemos asociar a Γ el juego en forma normal $G_\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ y decir que $s^* \in S$ es un equilibrio de Nash de Γ si y solo si s^* es un equilibrio de Nash de G_Γ.

Definición Sea $\Gamma = (I, K, P, C, u)$ un juego en forma extensiva con información perfecta. Un perfil de estrategias $s^* \in S$ es un *equilibrio de Nash* de Γ si para cada $i \in I$,

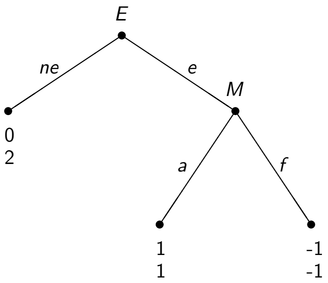
$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i, s^*_{-i})$$

para cada $s_i \in S_i$.

- Dado Γ, sea S^* el conjunto de todos equilibrios de Nash de Γ.

3.3.- Equilibrio de Nash

- Si $s \notin S^*$ entonces existe $i \in I$ y $\hat{s}_i \in S_i$ tal que $h_i(\hat{s}_i, s_{-i}) > h_i(s)$.
  - Por tanto, s no puede ser un consejo para los agentes racionales o s no puede ser un acuerdo, que es aceptable para todos los jugadores (*i.e.*, equilibrio de Nash es una condición necesaria de racionalidad).
  - O predecimos Equilibrio de Nash o imputamos el comportamiento irracional de algún jugador.
- Asunción implícita: el juego y la racionalidad de los jugadores es conocimiento común.
  - El jugador i sabe el juego.
  - El jugador i sabe el juego y sabe que el jugador j sabe el juego y que i es racional.
  - El jugador i sabe el jugo, sabe que el jugador j sabe el juego y que j' sabe que i es racional.
  - Etc.
- Hay juegos Γ con equilibrios múltiples. Pero, ¿todos ellos son iguales en términos de racionalidad?



- $I = \{E, M\}$.
- $S = \{(ne, a), (ne, f), (e, a), (e, f)\} = \{ne, e\} \times \{a, f\} = S_E \times S_M$.
- $S^* = \{(ne, f), (e, a)\}$.
- ¿Son los equilibrios igualmente racionales o plausibles?

3.3.- Equilibrio de Nash

- Inducción hacia atrás: aplicación de un príncipe de programación dinámica (problema de un agente) a juegos en la forma extensiva con información perfecta (problema de varios agentes).
- Zermelo (1913) para ajedrez y Kuhn (1953) para juegos en forma extensiva con información perfecta.
- Zermelo, E. "Über eine Anwendungen der Mengenlehre auf die Theorie der Schachspiels," *Proceedings of the International Fifth Congress of Mathematicians*. Cambridge: Cambridge University Press, 1913.

Theorem

Zermelo (1913) y Kuhn (1953). Sea $\Gamma = (I, K, P, C, u)$ *un juego finito en forma extensiva con información perfecta. Entonces,* $S^* \neq \varnothing$.

- **Comentario:** El Teorema garantiza la existencia del equilibrio de Nash en estrategias *puras*.

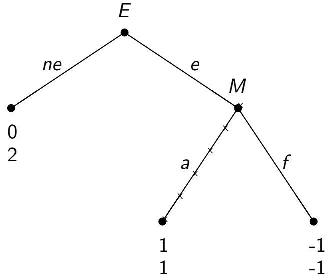
3.3.- Equilibrio de Nash: existencia y computación

- **Intuición** Nos enfocamos en el conjunto de nodos predecesores del conjunto de nodos terminales (penúltimos nodos). Cada jugador elige su mejor (una de las mejores) acción. Sabiendo esto, nos dirigimos a los nodos predecesores de los considerados. Cada jugador elige su mejor (o una de las mejores acciones) ...
- **Comentario 1 (muy importante):** Esta intuición nos da el procedimiento de como computar el equilibrio de Nash (en estrategias puras) de Γ.

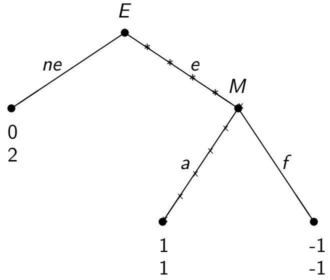
3.3.- Equilibrio de Nash: comentarios

- **Comentario 2:** El conjunto de equilibrios de Nash obtenido por inducción hacia atrás puede ser un subconjunto estricto de S^*.
  - Sea $\bar{S}^*$ el conjunto de equilibrios de Nash de Γ que se obtiene aplicando el procedimiento de la inducción hacia atrás.
  - Para mostrar que existen juegos Γ tal que $\bar{S}^* \subsetneq S^*$, consideramos el ejemplo anterior donde $\bar{S}^* = \{(e, a)\} \subsetneq \{(e, a), (ne, f)\} = S^*$.

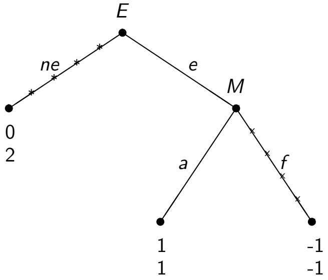
3.3.- Equilibrio de Nash: Ejemplo



3.3.- Equilibrio de Nash: Ejemplo



3.3.- Equilibrio de Nash: Ejemplo



3.3.- Equilibrio de Nash: comentarios

- **Comentario 3:** De todas maneras, aunque $|\bar{S}^*| \geq 2$, pero para cada par $s^*, \hat{s}^* \in \bar{S}^*$ tal que $a(s^*) \neq a(\hat{s}^*)$, $h_i(s^*) = h_i(\hat{s}^*)$ para algunos $i \in I$.
  - Si Γ tiene las propiedades que $|I| = 2$ y es estrictamente competitiva, entonces $s^*, \hat{s}^* \in \bar{S}^*$ implica que $h_i(s^*) = h_i(\hat{s}^*)$ para $i = 1, 2$.
  - Si Γ es un juego de 2 agentes de suma cero entonces $h_1(s^*) = -h_2(s^*)$ (Zermelo para ajedrez).
- **Comentario 4:** La existencia no está garantizada si Γ no es finita o si tiene información imperfecta.

3.3.- Ejemplo: Juego de señalización

- Muchas situaciones económicas tienen la siguiente estructura dinámica.
  - El jugador 1 elige una acción a_1 en el conjunto factible A_1.
  - El jugador 2 observa a_1 y entonces elige una acción a_2 en el conjunto factible A_2.
  - Entonces, las utilidades $u_1(a_1, a_2)$ y $u_2(a_1, a_2)$ están realizadas.
- Conjuntos estratégicos:
  - El jugador 1 : $S_1 = A_1$.
  - El jugador 2 : $S_2 = \{s_2 : A_1 \to A_2\}$.
- Pagos: para cada $(a_1, s_2) \in A_1 \times S_2$,

$$
\begin{aligned}
h_1(a_1, s_2) &= u_1(a_1, s_2(a_1)) \\
h_2(a_1, s_2) &= u_2(a_1, s_2(a_1)).
\end{aligned}
$$

3.3.- Ejemplo: Juego de señalización

- Encontramos equilibrio de Nash por inducción hacia atrás .
- El jugador 2. Dado $a_1 \in A_1$, eligir $a_2 \in A_2$ para que

$$\max u_2(a_1, a_2).$$

  - Asumimos que este problema de maximización tiene una única solución, $\beta_2(a_1)$.
  - Observamos que $\beta_2 : A_1 \to A_2$; es decir, $\beta_2 \in S_2$.
- El jugador 1. Dado β_1, eligir a_1 para que

$$\max u_1(a_1, \beta_2(a_1)).$$

  - Asumimos que, dado β_2, este problema de maximizar tiene una única solución: a_1^*.
  - Observamos que $a_1^* \in A_1 = S_1$.
- El par $(a_1^*, \beta_2(a_1^*))$ es el *resultado por inducción hacia atrás.*

3.4.- Información Imperfecta

- Queremos mejorar el modelo para que se puedan incorporar dos aspectos relacionados con la falta de información que los jugadores pueden tener durante el juego. (Kuhn, 1953).
    - Estratégico (enfoque de equilibrio): falta de información sobre decisiones tomadas previamente por otros jugadores. En un juego secuencial de tomar decisiones, los jugadores necesitan tomar decisiones sin saber los pagos relevantes, o las elecciones pueden ser simultáneas (y por tanto no conocidas por los jugadores).
    - Naturaleza (enfoque Bayesiano): falta de información sobre aquellos pagos que no son consecuencia de las decisiones de los jugadores. Para modelar esta ignorancia asumimos que jugadores saben posibles estados del mundo y la distribución de probabilidad que sigue la naturaleza.

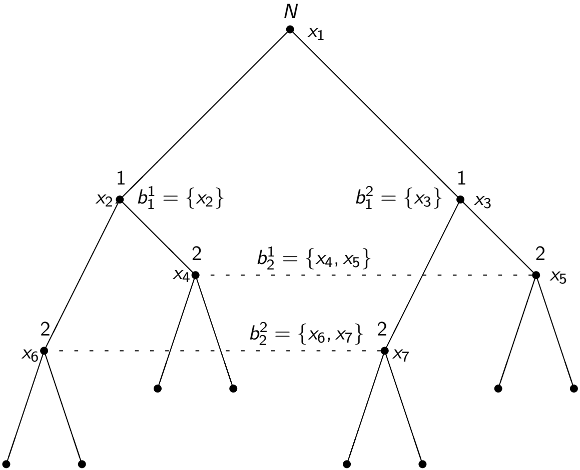
3.4.- Información Imperfecta. Definición

- Un *Juego (finito) en Forma Extensiva con Información Imperfecta* consiste de siete elementos $\Gamma = ((I, N), K, P, B, C, p, u)$ donde:
- $I = \{1, ..., n\}$ es el conjunto finito de *jugadores* y N es la *naturaleza*.
- K es un *árbol* con un conjunto de nodos *no-terminales* X (con un nodo inicial $x_1 \in X$, que indica donde empieza el juego) y un conjunto Z de nodos *terminales*.
- P es una partición de X en $n+1$ subconjuntos que está representada por una función $P : X \longrightarrow I \cup \{N\}$, donde para cada $i \in I$, $X_i = \{x \in X \mid P(x) = i\}$ y, sin pérdida de generalidad asumimos que $X_N = \{x_1\}$.

3.4.- Información Imperfecta: Conjuntos de Información

- $B = \{B_1, ..., B_n\}$ es la familia de conjuntos de información que describe lo que sabe cada jugador cuando tiene que tomar decisión.
- para cada $i \in I$, $B_i = \{b_i^1, ..., b_i^{t_i}\}$ es una partición del conjunto de nodos X_i. La interpretación es que si $x, x' \in b_i^k$ el jugador i no puede distinguir si está tomando la decisión en el nodo x o en el nodo x', que sucede o porque i no sabe la acción de la naturaleza, o porque las acciones de otros jugadores, o ambas cosas.

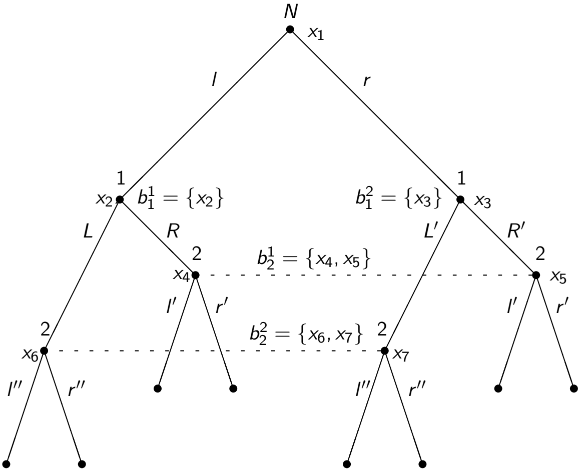
3.4.- Información Imperfecta



3.4.- Información Imperfecta

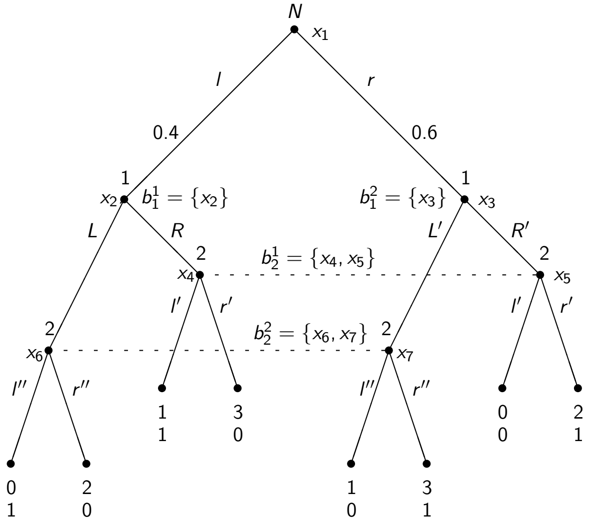
- C es la familia de conjuntos de elecciones, un conjunto para cada nodo no-terminal: $C = \{C_x\}_{x \in X}$.
- para cada nodo no-terminal, C_x es el conjunto de posibles acciones o elecciones disponibles a $P(x)$ en x.
- C_{x_1} es el conjunto de posibles elecciones de la naturaleza (estados del mundo).
- $C = \{C_x\}_{x \in X}$ debe tener la siguiente propiedad de consistencia:
    - para cada $x, x' \in b_i^k$, $C_x = C_{x'}$; de otra manera, sabiendo sus acciones disponibles i podría identificar en qué nodo de b_i^k está tomando decisión.
    - Así, identificamos este conjunto con $C_{b_i^k}$.
    - **Ejemplo:** $C_{x_4} = C_{x_5} = \{l', r'\} \equiv C_{b_2^1}$ y $C_{x_6} = C_{x_7} = \{l'', r''\} \equiv C_{b_2^2}$.

3.4.- Información Imperfecta



- p es una distribución de probabilidad en C_{x_1}, en línea con la cual la naturaleza elige un elemento de este conjunto.
  - **Ejemplo:** $p(l) = 0{,}4$ y $p(r) = 0{,}6$.
- $u = (u_1, ..., u_n)$, donde para cada $i \in I$, $u_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad vNM sobre el conjunto de nodos terminales (de hecho, sobre el conjunto de los resultados que pueden ser asociados con el conjunto de nodos terminales).

3.4.- Información Imperfecta



3.4.- Información Imperfecta

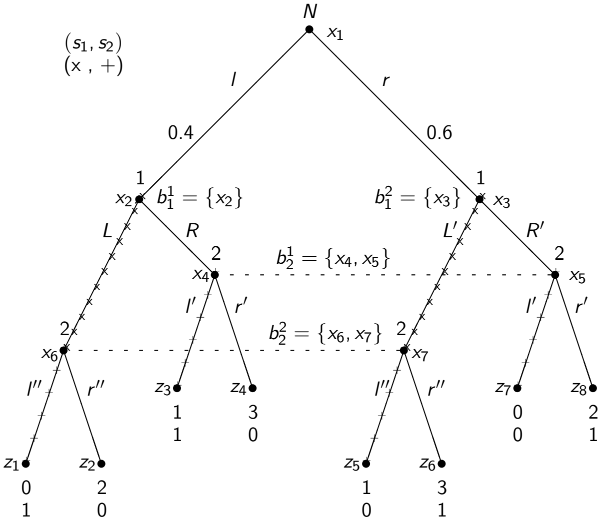
- Sea $\mathcal{L}(Z)$ el conjunto de las distribuciones de probabilidades en Z.
  - $q \in \mathcal{L}(Z)$ es tal que $0 \leq q(z) \leq 1$ y $\sum_{z \in Z} q(z) = 1$.
- Asumimos que los jugadores tienen preferencias sobre el conjunto $\mathcal{L}(Z)$ de las distribuciones de probabilidad en Z (*i.e.*, sobre el conjunto de resultados $A \approx Z$).
- Así, para cada $i \in I$, existe $U_i : \mathcal{L}(Z) \longrightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de la Utilidad Esperada; es decir, para cada $q \in \mathcal{L}(Z)$,

$$U_i(q) = \sum_{z \in Z} q(z) u_i(z).$$

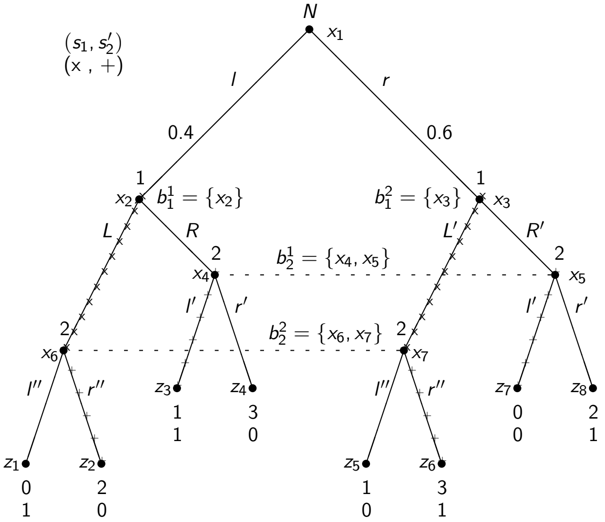
- Suposiciones implícitas:
  - El juego y la racionalidad de los jugadores son conocimiento común.
  - Los jugadores tienen memoria perfecta (no olvidan lo que saben o lo que aprenden).

3.4.- Información Imperfecta: estrategias

- Sea $\Gamma = ((I, N), K, P, B, C, p, u)$ un juego en forma extensiva con información imperfecta.
- Una *estrategia* para el jugador $i \in I$ en Γ es una función $s_i : B_i \longrightarrow \bigcup_{b \in B_i} C_b$ tal que para cada $b \in B_i$, $s_i(b) \in C_b$.
- Sea S_i el conjunto de todas las estrategias (puras) del jugador i.
- Sea $S = \prod_{i \in I} S_i$ el conjunto de perfiles de estrategias de Γ.
- **Ejemplo:**
  - $s_1(b_1^1) = L$, $s_1(b_1^2) = L'$, $s_2(b_2^1) = l'$, y $s_2(b_2^2) = l''$.
  - $s_2'(b_2^1) = l'$ and $s_2'(b_2^2) = r''$.



N
x_1
(s_1, s_2)
(x , +)
l
r
0.4
0.6
1
1
x_2
$b_1^1 = \{x_2\}$
$b_1^2 = \{x_3\}$
x_3
L
R
L'
R'
2
2
x_4
$b_2^1 = \{x_4, x_5\}$
x_5
l'
r'
l'
r'
2
$b_2^2 = \{x_6, x_7\}$
2
x_6
x_7
l''
r''
z_3
z_4
l''
r''
z_7
z_8
1
1
3
0
0
0
2
1
z_1
z_2
z_5
z_6
0
1
2
0
1
0
3
1



(s_1, s_2')
(x , +)
N
x_1
l
r
0.4
0.6
1
1
x_2
$b_1^1 = \{x_2\}$
$b_1^2 = \{x_3\}$
x_3
L
R
L'
R'
2
2
x_4
$b_2^1 = \{x_4, x_5\}$
x_5
l'
r'
l'
r'
2
$b_2^2 = \{x_6, x_7\}$
2
x_6
x_7
l''
r''
l''
r''
z_3
z_4
z_7
z_8
1 1
3 0
0 0
2 1
z_1
z_2
z_5
z_6
0 1
2 0
1 0
3 1

3.4.- Información Imperfecta: jugadas

- Dado p, la distribución de probabilidad en C_{x_1} (los estados del mundo), es posible generar diferentes distribuciones de probabilidad en Z, dependiendo del perfil de estrategias $s \in S$.
- Para cada $x \in C_{x_1}$ y $s \in S$ podemos identificar una única z (jugada del juego). Acordamos que identificamos $C_{x_1} \approx IF(x_1)$.
  - Entonces, $x = IP^k(z)$ para algunos $k \geq 1$.
  - Definimos $a : C_{x_1} \times S \longrightarrow Z$, donde $a(x, s)$ es el nodo terminal obtenido si la naturaleza elige x y los jugadores siguen el perfil de estrategias s.
  - **Ejemplo:**
    - $a(x_2, s)[\approx a(l, s)] = z_1$, $a(x_3, s)[\approx a(r, s)] = z_5$.
    - $a(x_2, s')[\approx a(l, s')] = z_2$, $a(x_3, s')[\approx a(r, s')] = z_6$.

- Dado $s \in S$, definimos la distribución de la probabilidad q_s en Z de la manera siguiente: para cada $z \in Z$,

$$q_s(z) = \begin{cases} p(x) & \text{si } a(x,s) = z \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

- Así, para cada $s \in S$,

$$\sum_{z \in Z} q_s(z) = \sum_{x \in C_{x_1}} p(x) = 1.$$

- **Ejemplo:**
  - $q_s(z_1) = 0{,}4$, $q_s(z_5) = 0{,}6$ y $q_s(z) = 0$ para cada $z \in Z \backslash \{z_1, z_5\}$.
  - $q_{(s_1,s_2')}(z_2) = 0{,}4$, $q_{(s_1,s_2')}(z_6) = 0{,}6$ y $q_{(s_1,s_2')}(z) = 0$ para cada $z \in Z \backslash \{z_2, z_6\}$.

3.4.- Información Imperfecta: pagos

- Cada jugador $i \in I$ evalúa $s \in S$ en línea con la distribución de la probabilidad q_s.

- Para cada jugador $i \in I$ definimos la función de pagos $h_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera: para cada $s \in S$,

$$h_i(s) = U_i(q_s) = \sum_{z \in Z} q_s(z) u_i(z).$$

- **Ejemplo:**
  - $h_1(s) = q_s(z_1)u_1(z_1) + q_s(z_5)u_1(z_5) = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 1 = 0{,}6.$
  - $h_2(s) = q_s(z_1)u_2(z_1) + q_s(z_5)u_2(z_5) = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 0 = 0{,}4.$
  - $h_1(s_1, s_2') = q_{(s_1,s_2')}(z_2)u_1(z_2) + q_{(s_1,s_2')}(z_6)u_1(z_6) = 0{,}4 \cdot 2 + 0{,}6 \cdot 3 = 2{,}6.$
  - $h_2(s_1, s_2') = q_{(s_1,s_2')}(z_2)u_2(z_2) + q_{(s_1,s_2')}(z_6)u_2(z_6) = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 1 = 0{,}6.$

3.4.- Información Imperfecta: equilibrio

- Dado un juego en forma extensiva con información imperfecta $\Gamma = ((I, N), K, P, B, C, p, u)$ podemos definir un juego en forma normal $G_\Gamma = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$, y por tanto, definimos la noción del Equilibrio de Nash de Γ como el Equilibrio de Nash de G_Γ.

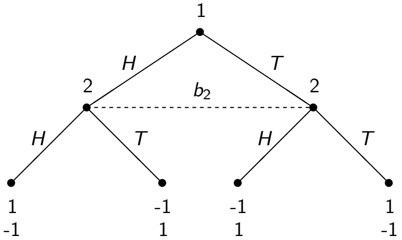
- Un perfil de estrategias $s^* \in S$ es un *Equilibrio de Nash* de $\Gamma = ((I, N), K, P, B, C, p, u)$ si para cada $i \in I$,

$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i', s_{-i}^*)$$

  para cada $s_i' \in S_i$.

- Sea S^* el conjunto de equilibrios de Nash de Γ.

- **Comentario 1** En general, inducción hacia atrás no se puede aplicar .



- **Comentario 2** Hay juegos Γ con $S^* = \varnothing$.

- **Comentario 3** Dado que la información perfecta es un caso particular de información imperfecta, hay juegos Γ con más de un equilibrio de Nash.

Ejemplo

1/2	$l'l''$	$l'r''$	$r'l'$	$r'r''$
LL'	0,6, 0,4	2,6, 0,6	0,6, 0, 4	2,6, 0,6
LR'	0, 0,4	0,8, 0	1,2, 1	2, 0,6
RL'	1, 0,4	2,2, 1	1,8,0	3, 0,6
RR'	0,4, 0,4	0,4, 0,4	2,4, 0,6	2,4, 0, 6

- $S^* = \{(LL', r'l'), (RR', l'r'')\}.$

3.4.- Información Imperfecta: equilibrio

- Sea Γ un juego en forma extensiva con información imperfecta.
- Definimos asociado juego en forma normal G_Γ.
- La extensión mixta de Γ es la extension mixta de G_Γ, $G_\Gamma^* = (I, (\Sigma_i)_{i \in I}, (H_i)_{i \in I})$, donde ahora los jugadores pueden eligir las distribuciones de probabilidad sobre sus conjuntos de estrategias puras.

Theorem

(Kuhn, 1953) La extensión mixta G_Γ^* de un juego finito en forma extensiva con información imperfecta Γ tiene por lo menos un equilibrio de Nash $\sigma^* \in \Sigma^*$.

3.4.- Información Imperfecta: estrategias de comportamiento

- Sea $\Gamma = ((I,N),K,P,B,C,p,u)$ un juego finito en forma extensiva con información imperfecta y sea $G_\Gamma^* = (I,(\Sigma_i)_{i\in I},(H_i)_{i\in I})$ la extension mixta de su juego asociado en forma normal $G_\Gamma = (I,(S_i)_{i\in I},(h_i)_{i\in I})$.
- Fijamos $i \in I$. Una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es una distribución de probabilidad sobre el conjunto

$$S_i = \left\{ s_i : B_i \longrightarrow \bigcup_{b\in B_i} C_b \mid \text{para cada } b \in B_i,\ s_i(b) \in C_b \right\}.$$

  - Formalmente, $\Sigma_i = \mathcal{L}(S_i)$, donde dado cualquier conjunto finito T, $\mathcal{L}(T) =$conjunto de distribuciones de probabilidad en T.
- Hay un enfoque equivalente (y más simple): estrategias de comportamiento .

3.4.- Información Imperfecta: estrategias de comportamiento

- Dado Γ y $i \in I$, definimos el conjunto de estrategias de comportamiento como

$$\hat{\Sigma}_i = \left\{ \hat{\sigma}_i : B_i \longrightarrow \bigcup_{b \in B_i} \mathcal{L}(C_b) \mid \text{para cada } b \in B_i,\ \hat{\sigma}_i(b) \in \mathcal{L}(C_b) \right\}.$$

- **Teorema de Kuhn:** Los dos enfoques son equivalentes.

- **Comentario:** Cada estrategia (pura) $s_i \in S_i$ simultáneamente pertenece a Σ_i y $\hat{\Sigma}_i$.

- Sea $\sigma_i \in \Sigma_i$, $\hat{\sigma}_i \in \hat{\Sigma}_i$ y este $s_{-i} \in S_{-i}$ dado. Para cada $z \in Z$, $p(z \mid \sigma_i, s_{-i})$ denota la probabilidad de z si está jugada (σ_i, s_{-i}) ; y $\hat{p}(z \mid \hat{\sigma}_i, s_{-i})$ denota la probabilidad de z si está jugada $(\hat{\sigma}_i, s_{-i})$.

3.4.- Información Imperfecta: estrategias de comportamiento

Definición Decimos que $\sigma_i \in \Sigma_i$ y $\hat{\sigma}_i \in \hat{\Sigma}_i$ son *equivalentes* si para cada $s_{-i} \in S_{-i}$,

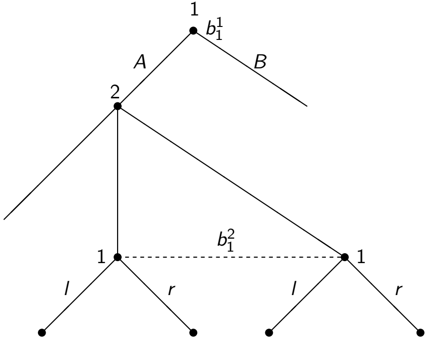
$$p(z \mid \sigma_i, s_{-i}) = \hat{p}(z \mid \hat{\sigma}_i, s_{-i})$$

para cada $z \in Z$.

Theorem

Kuhn, 1953. Sea Γ un juego finito en forma extensiva con información imperfecta y memoria perfecta. Entonces, Σ_i y $\hat{\Sigma}_i$ son equivalentes.

Ejemplo:



3.4.- Información Imperfecta: Ejemplo

- $S_1 = \{Al, Ar, Bl, Br\}$.
- Sea $\sigma_1(Al) = t_1$, $\sigma_1(Ar) = t_2$, $\sigma_1(Bl) = t_3$ y $\sigma_1(Br) = t_4$ tal que $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$ y $t_j \geq 0$ para cada $j = 1, 2, 3, 4$.
- Queremos construir una estrategia equivalente de comportamiento $\hat{\sigma}_1 = (q_1, q_2)$ donde $q_1 = \hat{\sigma}_1(b_1^1)(A)$ y $q_2 = \hat{\sigma}_1(b_1^2)(l)$.
- para cada $b \in B_i$ definimos

$$R(b) = \{s_i \in S_i \mid \exists s_{-i} \text{ t.q. } b \text{ está conseguido si está jugado } (s_i, s_{-i})\}.$$

3.4.- Información Imperfecta: Ejemplo

- Primero consideramos el conjunto de información b_1^1. Entonces, $R(b_1^1) = S_1$.

- Por lo tanto, $\sigma_1(s_i) > 0$ para algunas $s_i \in R(b_1^1)$. Así,

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(A) = \frac{\sum\limits_{\{s_i \in S_1 | s_i(b_1^1) = A\}} \sigma_i(s_i)}{\sum\limits_{s_i \in S_1} \sigma_i(s_i)} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = t_1 + t_2.$$

- De manera similar,

$$\hat{\sigma}_1(b_1^1)(B) = \frac{\sum\limits_{\{s_i \in S_1 | s_i(b_1^1) = B\}} \sigma_i(s_i)}{\sum\limits_{s_i \in S_1} \sigma_i(s_i)} = \frac{t_3 + t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = t_3 + t_4.$$

3.4.- Información Imperfecta: Ejemplo

- Ahora consideramos el conjunto de información b_1^2. Tenemos en cuenta que $R(b_1^2) = \{Al, Ar\}$.

- Asumimos primero que o $t_1 > 0$ o $t_2 > 0$. Entonces,

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(l) = \frac{\displaystyle\sum_{\{s_i \in R(b_1^2) | s_i(b_1^2) = l\}} \sigma_i(s_i)}{\displaystyle\sum_{s_i \in R(b_1^2)} \sigma_i(s_i)} = \frac{t_1}{t_1 + t_2}.$$

3.4.- Información Imperfecta: Ejemplo

y

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(r) = \frac{\sum\limits_{\{s_i \in R(b_1^2) | s_i(b_1^2)=r\}} \sigma_i(s_i)}{\sum\limits_{s_i \in R(b_1^2)} \sigma_i(s_i)} = \frac{t_2}{t_1 + t_2}.$$

- Asumimos ahora que $t_1 = 0$ y $t_2 = 0$. Entonces,

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(l) = \sum_{\{\bar{s}_i \in S_i | \bar{s}_i(b_1^2)=l\}} \sigma_i(\bar{s}_i) = t_1 + t_3$$

y

$$\hat{\sigma}_1(b_1^2)(r) = \sum_{\{\bar{s}_i \in S_i | \bar{s}_i(b_1^2)=r\}} \sigma_i(\bar{s}_i) = t_2 + t_4.$$