Teoría de Juegos (Código: 102477)

Módulo 2: Juegos en Forma Normal

Marina Bannikova

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

2.1.- Definición y Ejemplos

- Para describir las reglas del juego y la información que cada jugador tiene en su disposición es más conveniente en la forma extensiva.

2.1.- Definición y Ejemplos

- Para describir las reglas del juego y la información que cada jugador tiene en su disposición es más conveniente en la forma extensiva.
- Sin embargo, para obtener una predicción (un equilibrio) y para estudiar el conjunto de equilibrios (existencia, multiplicidad, óptima) es más conveniente utilizar el modelo más abstracto – modelo del juego en forma normal. Más adelante vamos a considerar en detalle juegos en forma extensiva, y obtendremos unos resultados más fuertes con las suposiciones más estrictas, y utilizaremos correspondientes juegos en forma normal.

2.1.- Definición y Ejemplos

Definición Un juego en forma *normal oestratégica* es un trillizo

$$G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I}),$$

donde

2.1.- Definición y Ejemplos

Definición Un juego en forma *normal oestratégica* es un trillizo

$$G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I}),$$

donde

- I es el conjunto de *jugadores* ($I = \{1, ..., n\}$),

Definición Un juego en forma *normal oestratégica* es un trillizo

$$G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I}),$$

donde

- I es el conjunto de *jugadores* ($I = \{1, ..., n\}$),
- S_i es el conjunto de *estrategias* del jugador i para cada $i \in I$.

2.1.- Definición y Ejemplos

Definición Un juego en forma *normal oestratégica* es un trillizo

$$G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I}),$$

donde

- I es el conjunto de *jugadores* ($I = \{1, ..., n\}$),
- S_i es el conjunto de *estrategias* del jugador i para cada $i \in I$.
  - Sea $S = \prod_{i \in I} S_i$ el conjunto de perfiles de estrategias.

2.1.- Definición y Ejemplos

Definición Un juego en forma *normal oestratégica* es un trillizo

$$G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I}),$$

donde

- I es el conjunto de *jugadores* ($I = \{1, ..., n\}$),
- S_i es el conjunto de *estrategias* del jugador i para cada $i \in I$.
  - Sea $S = \prod_{i \in I} S_i$ el conjunto de perfiles de estrategias.
- $h_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de *pagos* del conjunto de perfiles de estrategias.

2.1.- Definición y Ejemplos

Definición Un juego en forma *normal oestratégica* es un trillizo

$$G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I}),$$

donde

- I es el conjunto de *jugadores* ($I = \{1, ..., n\}$),
- S_i es el conjunto de *estrategias* del jugador i para cada $i \in I$.
  - Sea $S = \prod_{i \in I} S_i$ el conjunto de perfiles de estrategias.
- $h_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de *pagos* del conjunto de perfiles de estrategias.
  - Implícitamente, esto es como si hubiese sido una función de resultados $g : S \longrightarrow A$ y la función de utilidad $u_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.1.- Definición y Ejemplos

Definición Un juego en forma *normal oestratégica* es un trillizo

$$G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I}),$$

donde

- I es el conjunto de *jugadores* ($I = \{1, ..., n\}$),
- S_i es el conjunto de *estrategias* del jugador i para cada $i \in I$.
  - Sea $S = \prod_{i \in I} S_i$ el conjunto de perfiles de estrategias.
- $h_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de *pagos* del conjunto de perfiles de estrategias.
  - Implícitamente, esto es como si hubiese sido una función de resultados $g : S \longrightarrow A$ y la función de utilidad $u_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - Entonces, para cualquier $s \in S$, se cumple $h_i(s) \equiv u_i(g(s))$.

2.1.- Definición y Ejemplos

Matching Pennies: Dos jugadores tiene que decidir simultáneamente entre 'cara' y 'cruz'. Si los dos coinciden, el jugador 2 da su moneda al jugador 1; si no coinciden, entonces el jugador 1 da su moneda al jugador 2.

Matching Pennies: Dos jugadores tiene que decidir simultáneamente entre 'cara' y 'cruz'. Si los dos coinciden, el jugador 2 da su moneda al jugador 1; si no coinciden, entonces el jugador 1 da su moneda al jugador 2.

- $I = \{1, 2\}$.

Matching Pennies: Dos jugadores tiene que decidir simultáneamente entre 'cara' y 'cruz'. Si los dos coinciden, el jugador 2 da su moneda al jugador 1; si no coinciden, entonces el jugador 1 da su moneda al jugador 2.

- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = S_2 = \{Cr, Cz\}$.

Matching Pennies: Dos jugadores tiene que decidir simultáneamente entre 'cara' y 'cruz'. Si los dos coinciden, el jugador 2 da su moneda al jugador 1; si no coinciden, entonces el jugador 1 da su moneda al jugador 2.

- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = S_2 = \{Cr, Cz\}$.
- $h_1(Cr, Cr) = h_1(Cz, Cz) = h_2(Cr, Cz) = h_2(Cz, Cr) = 1$.

Matching Pennies: Dos jugadores tiene que decidir simultáneamente entre 'cara' y 'cruz'. Si los dos coinciden, el jugador 2 da su moneda al jugador 1; si no coinciden, entonces el jugador 1 da su moneda al jugador 2.

- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = S_2 = \{Cr, Cz\}$.
- $h_1(Cr, Cr) = h_1(Cz, Cz) = h_2(Cr, Cz) = h_2(Cz, Cr) = 1$.
- $h_2(Cr, Cr) = h_2(Cz, Cz) = h_1(Cr, Cz) = h_1(Cz, Cr) = -1$.

2.1.- Definición y Ejemplos

Matching Pennies: Dos jugadores tiene que decidir simultáneamente entre 'cara' y 'cruz'. Si los dos coinciden, el jugador 2 da su moneda al jugador 1; si no coinciden, entonces el jugador 1 da su moneda al jugador 2.

- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = S_2 = \{Cr, Cz\}$.
- $h_1(Cr, Cr) = h_1(Cz, Cz) = h_2(Cr, Cz) = h_2(Cz, Cr) = 1$.
- $h_2(Cr, Cr) = h_2(Cz, Cz) = h_1(Cr, Cz) = h_1(Cz, Cr) = -1$.
- Representación en Matriz

$1\backslash 2$	Cr	Cz
Cr	1,-1	-1, 1
Cz	-1, 1	1,-1

Dilema de Prisioneros

Dilema de Prisioneros

- Fue desarrollado originariamente por Flood y Dresher, en RAND, 1950. Más tarde, ha sido formalizado como un juego por Tucker, en Princeton.

Dilema de Prisioneros

- Fue desarrollado originariamente por Flood y Dresher, en RAND, 1950. Más tarde, ha sido formalizado como un juego por Tucker, en Princeton.
- La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato.

Dilema de Prisioneros

- Fue desarrollado originariamente por Flood y Dresher, en RAND, 1950. Más tarde, ha sido formalizado como un juego por Tucker, en Princeton.
- La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato.
  - Si uno traiciona y testifica contra el otro (Traiciona, T), y el otro se queda callado (Coopera, C), el traidor está liberado y el callado será condenado a 4 años.

2.1.- Definición y Ejemplos

Dilema de Prisioneros

- Fue desarrollado originariamente por Flood y Dresher, en RAND, 1950. Más tarde, ha sido formalizado como un juego por Tucker, en Princeton.
- La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato.
  - Si uno traiciona y testifica contra el otro (Traiciona, T), y el otro se queda callado (Coopera, C), el traidor está liberado y el callado será condenado a 4 años.
  - Si los dos se quedan callados (C), los dos serán condenados a un año.

Dilema de Prisioneros

- Fue desarrollado originariamente por Flood y Dresher, en RAND, 1950. Más tarde, ha sido formalizado como un juego por Tucker, en Princeton.
- La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato.
    - Si uno traiciona y testifica contra el otro (Traiciona, T), y el otro se queda callado (Coopera, C), el traidor está liberado y el callado será condenado a 4 años.
    - Si los dos se quedan callados (C), los dos serán condenados a un año.
    - Si se traicionan el uno al otro (T), los dos serán condenados a tres años.

Dilema de Prisioneros

- Fue desarrollado originariamente por Flood y Dresher, en RAND, 1950. Más tarde, ha sido formalizado como un juego por Tucker, en Princeton.
- La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato.
  - Si uno traiciona y testifica contra el otro (Traiciona, T), y el otro se queda callado (Coopera, C), el traidor está liberado y el callado será condenado a 4 años.
  - Si los dos se quedan callados (C), los dos serán condenados a un año.
  - Si se traicionan el uno al otro (T), los dos serán condenados a tres años.
  - Cada prisionero tiene que eligir entre traicionar (T) o negar (C).

2.1.- Definición y Ejemplos

Dilema de Prisioneros

- Fue desarrollado originariamente por Flood y Dresher, en RAND, 1950. Más tarde, ha sido formalizado como un juego por Tucker, en Princeton.
- La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato.
  - Si uno traiciona y testifica contra el otro (Traiciona, T), y el otro se queda callado (Coopera, C), el traidor está liberado y el callado será condenado a 4 años.
  - Si los dos se quedan callados (C), los dos serán condenados a un año.
  - Si se traicionan el uno al otro (T), los dos serán condenados a tres años.
  - Cada prisionero tiene que eligir entre traicionar (T) o negar (C).
  - Cada uno está seguro que el otro no se va a enterar sobre la traición antes de acabar la investigación.

Dilema de Prisioneros

- Asumimos que cada jugador se preocupa solo por minimizar su tiempo en la prisión; formalmente, maximizando el número de años de libertad substraídos del número máximo de prisión.

Dilema de Prisioneros

- Asumimos que cada jugador se preocupa solo por minimizar su tiempo en la prisión; formalmente, maximizando el número de años de libertad substraídos del número máximo de prisión.
- $I = \{1, 2\}$.

Dilema de Prisioneros

- Asumimos que cada jugador se preocupa solo por minimizar su tiempo en la prisión; formalmente, maximizando el número de años de libertad substraídos del número máximo de prisión.
- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = S_2 = \{C, T\}$.

Dilema de Prisioneros

- Asumimos que cada jugador se preocupa solo por minimizar su tiempo en la prisión; formalmente, maximizando el número de años de libertad substraídos del número máximo de prisión.
- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = S_2 = \{C, T\}$.
- $h(C, C) = (3, 3)$, $h(T, T) = (1, 1)$, $h(C, T) = (0, 4)$, y $h(T, C) = (4, 0)$.

Dilema de Prisioneros

- Asumimos que cada jugador se preocupa solo por minimizar su tiempo en la prisión; formalmente, maximizando el número de años de libertad substraídos del número máximo de prisión.
- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = S_2 = \{C, T\}$.
- $h(C, C) = (3, 3)$, $h(T, T) = (1, 1)$, $h(C, T) = (0, 4)$, y $h(T, C) = (4, 0)$.
- Representación en Matriz

Años en prisión:

$1\backslash 2$	C	T
C	1, 1	4, 0
T	0, 4	3, 3

Dilema de Prisioneros

- Asumimos que cada jugador se preocupa solo por minimizar su tiempo en la prisión; formalmente, maximizando el número de años de libertad substraídos del número máximo de prisión.
- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = S_2 = \{C, T\}$.
- $h(C, C) = (3, 3)$, $h(T, T) = (1, 1)$, $h(C, T) = (0, 4)$, y $h(T, C) = (4, 0)$.
- Representación en Matriz

Años en prisión:

$1\backslash 2$	C	T
C	$1, 1$	$4, 0$
T	$0, 4$	$3, 3$

Dilema de Prisioneros

- Asumimos que cada jugador se preocupa solo por minimizar su tiempo en la prisión; formalmente, maximizando el número de años de libertad substraídos del número máximo de prisión.
- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = S_2 = \{C, T\}$.
- $h(C, C) = (3, 3)$, $h(T, T) = (1, 1)$, $h(C, T) = (0, 4)$, y $h(T, C) = (4, 0)$.
- Representación en Matriz

Años en prisión:

$1\backslash 2$	C	T
C	1, 1	4, 0
T	0, 4	3, 3

Pagos:

$1\backslash 2$	C	T
C	3, 3	0, 4
T	4, 0	1, 1

Batalla de Sexos

- Imaginamos una pareja (novios) que han quedado para esta noche, pero no recuerdan si han quedado para ir a ver en un bar FCB vs. Real Madrid o ir a Ballet. Al novio le gustaría ir (evidentemente) a ver el fútbol. A la novia le gustaría ir a ver el ballet. Pero los dos claramente prefieren ir al mismo sitio más que ir por separado.

Batalla de Sexos

- Imaginamos una pareja (novios) que han quedado para esta noche, pero no recuerdan si han quedado para ir a ver en un bar FCB vs. Real Madrid o ir a Ballet. Al novio le gustaría ir (evidentemente) a ver el fútbol. A la novia le gustaría ir a ver el ballet. Pero los dos claramente prefieren ir al mismo sitio más que ir por separado.
- $I = \{h, d\}$.

Batalla de Sexos

- Imaginamos una pareja (novios) que han quedado para esta noche, pero no recuerdan si han quedado para ir a ver en un bar FCB vs. Real Madrid o ir a Ballet. Al novio le gustaría ir (evidentemente) a ver el fútbol. A la novia le gustaría ir a ver el ballet. Pero los dos claramente prefieren ir al mismo sitio más que ir por separado.
- $I = \{h, d\}$.
- $S_h = S_d = \{F, B\}$.

Batalla de Sexos

- Imaginamos una pareja (novios) que han quedado para esta noche, pero no recuerdan si han quedado para ir a ver en un bar FCB vs. Real Madrid o ir a Ballet. Al novio le gustaría ir (evidentemente) a ver el fútbol. A la novia le gustaría ir a ver el ballet. Pero los dos claramente prefieren ir al mismo sitio más que ir por separado.
- $I = \{h, d\}$.
- $S_h = S_d = \{F, B\}$.
- $u_d(B) > u_d(F)$ y $u_h(F) > u_h(B)$

Batalla de Sexos

- Imaginamos una pareja (novios) que han quedado para esta noche, pero no recuerdan si han quedado para ir a ver en un bar FCB vs. Real Madrid o ir a Ballet. Al novio le gustaría ir (evidentemente) a ver el fútbol. A la novia le gustaría ir a ver el ballet. Pero los dos claramente prefieren ir al mismo sitio más que ir por separado.
- $I = \{h, d\}$.
- $S_h = S_d = \{F, B\}$.
- $u_d(B) > u_d(F)$ y $u_h(F) > u_h(B)$
- $h_h(F, F) = h_d(B, B) = 3$, $h_d(F, F) = h_m(B, B) = 1$, $h(F, B) = h(B, F) = (0, 0)$.

Batalla de Sexos

- Imaginamos una pareja (novios) que han quedado para esta noche, pero no recuerdan si han quedado para ir a ver en un bar FCB vs. Real Madrid o ir a Ballet. Al novio le gustaría ir (evidentemente) a ver el fútbol. A la novia le gustaría ir a ver el ballet. Pero los dos claramente prefieren ir al mismo sitio más que ir por separado.
- $I = \{h, d\}$.
- $S_h = S_d = \{F, B\}$.
- $u_d(B) > u_d(F)$ y $u_h(F) > u_h(B)$
- $h_h(F, F) = h_d(B, B) = 3$, $h_d(F, F) = h_m(B, B) = 1$, $h(F, B) = h(B, F) = (0, 0)$.
- Representación en Matriz

$h \backslash d$	F	B
F	$3, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 3$

Juego de Cooperación

- $I = \{1, 2\}$.

Juego de Cooperación

- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = \{T, B\}$, $S_2 = \{L, R\}$.

Juego de Cooperación

- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = \{T, B\}$, $S_2 = \{L, R\}$.
- $h(T, L) = (1, 1)$, $h(B, R) = (2, 2)$, $h(T, R) = h(B, L) = (0, 0)$.

Juego de Cooperación

- $I = \{1, 2\}$.
- $S_1 = \{T, B\}$, $S_2 = \{L, R\}$.
- $h(T, L) = (1, 1)$, $h(B, R) = (2, 2)$, $h(T, R) = h(B, L) = (0, 0)$.
- Representación en Matriz

$1\backslash 2$	L	R
T	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$2, 2$

2.2.- Equilibrio de Nash

Entre todos los posibles comportamientos en S queremos identificar los perfiles de estrategias que parezcan más plausibles. Contestamos a las dos preguntas relacionadas entre ellas:

2.2.- Equilibrio de Nash

Entre todos los posibles comportamientos en S queremos identificar los perfiles de estrategias que parezcan más plausibles. Contestamos a las dos preguntas relacionadas entre ellas:

- Sabiendo que todos los jugadores son racionales (es decir que ellos quieren maximizar su utilidad) ¿cuál comportamiento sería *aconsejable* para cada jugador?

2.2.- Equilibrio de Nash

Entre todos los posibles comportamientos en S queremos identificar los perfiles de estrategias que parezcan más plausibles. Contestamos a las dos preguntas relacionadas entre ellas:

- Sabiendo que todos los jugadores son racionales (es decir que ellos quieren maximizar su utilidad) ¿cuál comportamiento sería *aconsejable* para cada jugador?
- ¿Cuáles perfiles de estrategias son *estables*?

2.2.- Equilibrio de Nash

Entre todos los posibles comportamientos en S queremos identificar los perfiles de estrategias que parezcan más plausibles. Contestamos a las dos preguntas relacionadas entre ellas:

- Sabiendo que todos los jugadores son racionales (es decir que ellos quieren maximizar su utilidad) ¿cuál comportamiento sería *aconsejable* para cada jugador?
- ¿Cuáles perfiles de estrategias son *estables*?
    - Estable en el sentido que si los jugadores llegan a un *acuerdo* después de jugar esta estrategia, y ningún otro jugador no tiene incentivos de romper el acuerdo.

2.2.- Equilibrio de Nash

Entre todos los posibles comportamientos en S queremos identificar los perfiles de estrategias que parezcan más plausibles. Contestamos a las dos preguntas relacionadas entre ellas:

- Sabiendo que todos los jugadores son racionales (es decir que ellos quieren maximizar su utilidad) ¿cuál comportamiento sería *aconsejable* para cada jugador?
- ¿Cuáles perfiles de estrategias son *estables*?
  - Estable en el sentido que si los jugadores llegan a un *acuerdo* después de jugar esta estrategia, y ningún otro jugador no tiene incentivos de romper el acuerdo.
- Respuesta: equilibrio de Nash.

2.2.- Equilibrio de Nash

Entre todos los posibles comportamientos en S queremos identificar los perfiles de estrategias que parezcan más plausibles. Contestamos a las dos preguntas relacionadas entre ellas:

- Sabiendo que todos los jugadores son racionales (es decir que ellos quieren maximizar su utilidad) ¿cuál comportamiento sería *aconsejable* para cada jugador?
- ¿Cuáles perfiles de estrategias son *estables*?
  - Estable en el sentido que si los jugadores llegan a un *acuerdo* después de jugar esta estrategia, y ningún otro jugador no tiene incentivos de romper el acuerdo.
- Respuesta: equilibrio de Nash.
  - Nash, J. "Equilibrium Points in $N-$Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA* 36, 48-49, 1950.

2.2.- Equilibrio de Nash

Entre todos los posibles comportamientos en S queremos identificar los perfiles de estrategias que parezcan más plausibles. Contestamos a las dos preguntas relacionadas entre ellas:

- Sabiendo que todos los jugadores son racionales (es decir que ellos quieren maximizar su utilidad) ¿cuál comportamiento sería *aconsejable* para cada jugador?
- ¿Cuáles perfiles de estrategias son *estables*?
    - Estable en el sentido que si los jugadores llegan a un *acuerdo* después de jugar esta estrategia, y ningún otro jugador no tiene incentivos de romper el acuerdo.
- Respuesta: equilibrio de Nash.
    - Nash, J. "Equilibrium Points in $N-$Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA* 36, 48-49, 1950.
- Notación. Dado $s \in S$, $i \in I$, y $s'_i \in S_i$ conjunto

$$(s'_i, s_{-i}) \equiv (s_1, ..., s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, ..., s_n).$$

2.2.- Equilibrio de Nash

Definición: Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. Un perfil de estrategia $s^* \in S$ es un *equilibrio de Nash* de G si para cualquier $i \in I$,

$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i, s^*_{-i})$$

para cada $s_i \in S_i$.

2.2.- Equilibrio de Nash

Definición: Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. Un perfil de estrategia $s^* \in S$ es un *equilibrio de Nash* de G si para cualquier $i \in I$,

$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i, s^*_{-i})$$

para cada $s_i \in S_i$.

- Dado G, sea S^* el conjunto de todos equilibrios de Nash de G.

2.2.- Equilibrio de Nash

Definición: Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. Un perfil de estrategia $s^* \in S$ es un *equilibrio de Nash* de G si para cualquier $i \in I$,

$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i, s^*_{-i})$$

para cada $s_i \in S_i$.

- Dado G, sea S^* el conjunto de todos equilibrios de Nash de G.
- Problemas:

2.2.- Equilibrio de Nash

Definición: Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. Un perfil de estrategia $s^* \in S$ es un *equilibrio de Nash* de G si para cualquier $i \in I$,

$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i, s^*_{-i})$$

para cada $s_i \in S_i$.

- Dado G, sea S^* el conjunto de todos equilibrios de Nash de G.
- Problemas:
  - Existencia (Matching Pennies).

2.2.- Equilibrio de Nash

Definición: Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. Un perfil de estrategia $s^* \in S$ es un *equilibrio de Nash* de G si para cualquier $i \in I$,

$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i, s^*_{-i})$$

para cada $s_i \in S_i$.

- Dado G, sea S^* el conjunto de todos equilibrios de Nash de G.
- Problemas:
  - Existencia (Matching Pennies).
  - Multiplicidad (Batalla de Sexos y Juego de Coordinación).

2.2.- Equilibrio de Nash

Definición: Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. Un perfil de estrategia $s^* \in S$ es un *equilibrio de Nash* de G si para cualquier $i \in I$,

$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i, s^*_{-i})$$

para cada $s_i \in S_i$.

- Dado G, sea S^* el conjunto de todos equilibrios de Nash de G.
- Problemas:
    - Existencia (Matching Pennies).
    - Multiplicidad (Batalla de Sexos y Juego de Coordinación).
    - Óptima (todo es posible):

2.2.- Equilibrio de Nash

Definición: Sea $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I})$ un juego en forma normal. Un perfil de estrategia $s^* \in S$ es un *equilibrio de Nash* de G si para cualquier $i \in I$,

$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i, s^*_{-i})$$

para cada $s_i \in S_i$.

- Dado G, sea S^* el conjunto de todos equilibrios de Nash de G.
- Problemas:
  - Existencia (Matching Pennies).
  - Multiplicidad (Batalla de Sexos y Juego de Coordinación).
  - Óptima (todo es posible):
    - Si: Batalla de Sexos ((F, F) y (B, B)) y juego de Coordinación ((B, R)).

2.2.- Equilibrio de Nash

Definición: Sea $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I})$ un juego en forma normal. Un perfil de estrategia $s^* \in S$ es un *equilibrio de Nash* de G si para cualquier $i \in I$,

$$h_i(s^*) \geq h_i(s_i, s^*_{-i})$$

para cada $s_i \in S_i$.

- Dado G, sea S^* el conjunto de todos equilibrios de Nash de G.
- Problemas:
  - Existencia (Matching Pennies).
  - Multiplicidad (Batalla de Sexos y Juego de Coordinación).
  - Óptima (todo es posible):
    - Si: Batalla de Sexos ((F, F) y (B, B)) y juego de Coordinación ((B, R)).
    - NO: Juego de Coordinación ((T, L)), Dilema de Prisionero ((D, D)).

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

1.- Punto Fijo. El punto de vista estático: si estamos en este punto, queremos quedarnos aquí.

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

1.- Punto Fijo. El punto de vista estático: si estamos en este punto, queremos quedarnos aquí.

Definición. Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. La *correspondiente mejor respuesta* del jugador i es la función $\beta_i : S \twoheadrightarrow S_i$ donde para cada $s \in S$, $(\beta_i(s) \subseteq S_i)$

$$\begin{aligned} \beta_i(s) &= \arg\max_{s_i' \in S_i} h_i(s_i', s_{-i}) \\ &= \{s_i' \in S_i \mid h_i(s_i', s_{-i}) \geq h_i(s_i'', s_{-i}) \text{ para cada } s_i'' \in S_i\}. \end{aligned}$$

Definición. Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. La *correspondiente mejor respuesta* es la función $\beta : S \twoheadrightarrow S$ donde para cada $s \in S$,

$$\beta(s) = (\beta_1(s), ..., \beta_n(s)).$$

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

1.- Punto Fijo. El punto de vista estático: si estamos en este punto, queremos quedarnos aquí.

Definición. Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. La *correspondiente mejor respuesta* del jugador i es la función $\beta_i : S \twoheadrightarrow S_i$ donde para cada $s \in S$, $(\beta_i(s) \subseteq S_i)$

$$\begin{aligned} \beta_i(s) &= \arg\max_{s_i' \in S_i} h_i(s_i', s_{-i}) \\ &= \{s_i' \in S_i \mid h_i(s_i', s_{-i}) \geq h_i(s_i'', s_{-i}) \text{ para cada } s_i'' \in S_i\}. \end{aligned}$$

Definición. Sea $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ un juego en forma normal. La *correspondiente mejor respuesta* es la función $\beta : S \twoheadrightarrow S$ donde para cada $s \in S$,

$$\beta(s) = (\beta_1(s), ..., \beta_n(s)).$$

Hecho: Sea G un juego en forma normal. Entonces, $s^* \in S^* \Longleftrightarrow s^* \in \beta(s^*)$.

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

1.1.– Matching Pennies

$1\backslash 2$	Cr	Cz
Cr	1,-1	-1, 1
Cz	-1, 1	1,-1

$$\begin{tikzcd}
(Cr, Cr) \arrow[r, "\beta"] & (Cr, Cz) \arrow[d, "\beta"] \\
(Cz, Cr) \arrow[u, "\beta"] & (Cz, Cz) \arrow[l, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

1.1.– Matching Pennies

$$
\begin{tikzcd}
(Cr, Cr) \arrow[r, "\beta"] & (Cr, Cz) \arrow[d, "\beta"] \\
(Cz, Cr) \arrow[u, "\beta"] & (Cz, Cz) \arrow[l, "\beta"]
\end{tikzcd}
$$

$1 \backslash 2$	Cr	Cz
Cr	1,-1	-1, 1
Cz	-1, 1	1,-1

$S^* = \varnothing.$

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

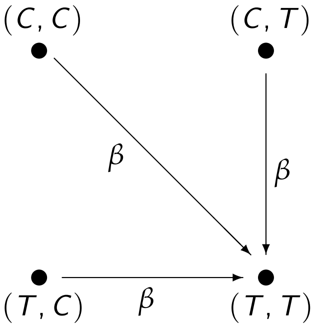
1.2.– Dilema de Prisioneros

$$\begin{tikzcd}
(C, C) \arrow[dr, "\beta"] & (C, T) \arrow[d, "\beta"] \\
(T, C) \arrow[r, "\beta"] & (T, T)
\end{tikzcd}$$

$1\backslash 2$	C	T
C	$3, 3$	$0, 4$
T	$4, 0$	$1, 1$

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

1.2.– Dilema de Prisioneros

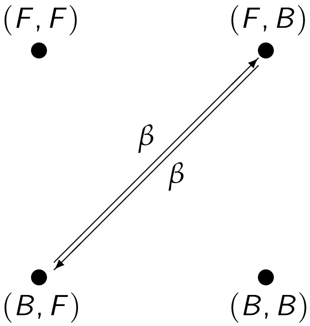


$1 \backslash 2$	C	T
C	$3, 3$	$0, 4$
T	$4, 0$	$1, 1$

$\beta(T, T) = \{(T, T)\}$. Así, $S^* = \{(T, T)\}$.

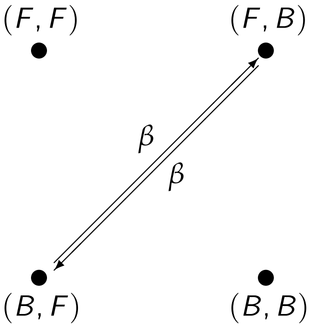
1.3.– Batalla de Sexos

$m \backslash w$	F	B
F	3, 1	0, 0
B	0, 0	1, 3



2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

1.3.– Batalla de Sexos



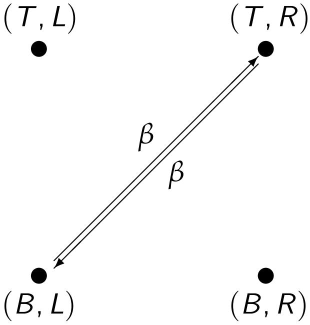
$m \backslash w$	F	B
F	$3, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 3$

$\beta(F, F) = (F, F)$ y $\beta(B, B) = (B, B)$. Así, $S^* = \{(F, F), (B, B)\}$.

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

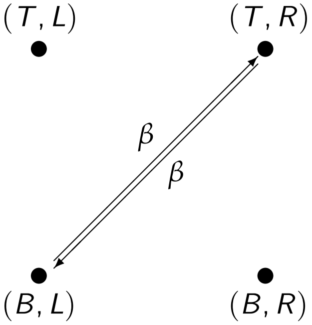
1.4.– Juego de coordinación

$1\backslash 2$	L	R
T	$1,1$	$0,0$
B	$0,0$	$2,2$



2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

1.4.– Juego de coordinación



$1\backslash 2$	L	R
T	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$2, 2$

$\beta(T, L) = (T, L)$ y $\beta(B, R) = (B, R)$. Así, $S^* = \{(T, L), (B, R)\}$.

2.- La predicción consistente

2.- La predicción consistente

- s^* es un acuerdo previo estable.

2.- La predicción consistente

- s^* es un acuerdo previo estable.
- Asumimos que $s \notin S^*$; *i.e.*, existen $i \in I$ y $s'_i \in S_i$ tal que $h_i(s'_i, s_{-i}) > h_i(s_i, s_{-i})$. Entonces, o

2.- La predicción consistente

- s^* es un acuerdo previo estable.
- Asumimos que $s \notin S^*$; *i.e.*, existen $i \in I$ y $s_i' \in S_i$ tal que $h_i(s_i', s_{-i}) > h_i(s_i, s_{-i})$. Entonces, o
    - i esperaba s_{-i} pero no es racional (i no está maximizando sus pagos, dado s_{-i}) o

2.- La predicción consistente

- s^* es un acuerdo previo estable.
- Asumimos que $s \notin S^*$; *i.e.*, existen $i \in I$ y $s_i' \in S_i$ tal que $h_i(s_i', s_{-i}) > h_i(s_i, s_{-i})$. Entonces, o
    - i esperaba s_{-i} pero no es racional (i no está maximizando sus pagos, dado s_{-i}) o
    - i esperaba algo diferente; es decir, existe $s_{-i}^e \neq s_{-i}$ tal que $h_i(s_i, s_{-i}^e) \geq h_i(s_i', s_{-i}^e)$ para cada $s_i' \in S_i$.

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

2.- La predicción consistente

- s^* es un acuerdo previo estable.
- Asumimos que $s \notin S^*$; *i.e.*, existen $i \in I$ y $s_i' \in S_i$ tal que $h_i(s_i', s_{-i}) > h_i(s_i, s_{-i})$. Entonces, o
  - i esperaba s_{-i} pero no es racional (i no está maximizando sus pagos, dado s_{-i}) o
  - i esperaba algo diferente; es decir, existe $s_{-i}^e \neq s_{-i}$ tal que $h_i(s_i, s_{-i}^e) \geq h_i(s_i', s_{-i}^e)$ para cada $s_i' \in S_i$.
- Así, si los jugadores son racionales y hacen consistentes predicciones deberían jugar el equilibrio de Nash.

2.- La predición consistente

2.- La predición consistente

- **Observación 1:** Si $\#S^* = 1$, esta interpretación es significativa. Por ejemplo:

$1\backslash 2$	L	M	R
u	$3, 0$	$0, 2$	$0, 3$
m	$2, 0$	$1, 1$	$2, 0$
b	$0, 3$	$0, 2$	$3, 0$

2.- La predición consistente

- **Observación 1:** Si $\#S^* = 1$, esta interpretación es significativa. Por ejemplo:

$1\backslash 2$	L	M	R
u	$3,0$	$0,2$	$0,3$
m	$2,0$	$1,1$	$2,0$
b	$0,3$	$0,2$	$3,0$

- (m, M) es la única predicción consistente.

2.- La predición consistente

- **Observación 1:** Si $\#S^* = 1$, esta interpretación es significativa. Por ejemplo:

$1\backslash 2$	L	M	R
u	$3,0$	$0,2$	$0,3$
m	$2,0$	$1,1$	$2,0$
b	$0,3$	$0,2$	$3,0$

- (m, M) es la única predicción consistente.
  - De otra manera, en $s = (u, L)$ por ejemplo, si 2 fuese racional (dado u, R es mejor que L) él debería esperar b; es decir, para justificar $s_2 = L$ necesitamos $s_1 = b \neq u$.

2.- La predición consistente

- **Observación 1:** Si $\#S^* = 1$, esta interpretación es significativa. Por ejemplo:

$1\backslash 2$	L	M	R
u	$3,0$	$0,2$	$0,3$
m	$2,0$	$1,1$	$2,0$
b	$0,3$	$0,2$	$3,0$

- (m, M) es la única predicción consistente.
  - De otra manera, en $s = (u, L)$ por ejemplo, si 2 fuese racional (dado u, R es mejor que L) él debería esperar b; es decir, para justificar $s_2 = L$ necesitamos $s_1 = b \neq u$.
  - Volveremos a este tipo de razonamiento más adelante, en comportamiento estratégico racionalizable.

2.- La predicción consistente

2.- La predicción consistente

- **Observación 2:** Si $\#S^* > 1$ entonces, el argumento no parece relevante (necesitaríamos algo más: coordinación).

2.- La predicción consistente

- **Observación 2:** Si $\#S^* > 1$ entonces, el argumento no parece relevante (necesitaríamos algo más: coordinación).
- En la Batalla de Sexos $(F, B) \notin S^*$ podría estar justificado por las esperanzas razonables (parte de un equilibrio):

2.- La predicción consistente

- **Observación 2:** Si $\#S^* > 1$ entonces, el argumento no parece relevante (necesitaríamos algo más: coordinación).
- En la Batalla de Sexos $(F, B) \notin S^*$ podría estar justificado por las esperanzas razonables (parte de un equilibrio):
  - m espera $s_w^e = F$ (parte de un equilibrio) y

2.- La predicción consistente

- **Observación 2:** Si $\#S^* > 1$ entonces, el argumento no parece relevante (necesitaríamos algo más: coordinación).
- En la Batalla de Sexos $(F, B) \notin S^*$ podría estar justificado por las esperanzas razonables (parte de un equilibrio):
  - m espera $s_w^e = F$ (parte de un equilibrio) y
  - w espera $s_m^e = B$ (también parte de un equilibrio).

2.- La predicción consistente

- **Observación 2:** Si $\#S^* > 1$ entonces, el argumento no parece relevante (necesitaríamos algo más: coordinación).
- En la Batalla de Sexos $(F, B) \notin S^*$ podría estar justificado por las esperanzas razonables (parte de un equilibrio):
  - m espera $s_w^e = F$ (parte de un equilibrio) y
  - w espera $s_m^e = B$ (también parte de un equilibrio).
- Utilizando el equilibrio para predecir el comportamiento de los jugadores puede llevar a un comportamiento non-equilibrio (acciones$\neq$expectaciones).

2.- La predicción consistente

- **Observación 2:** Si $\#S^* > 1$ entonces, el argumento no parece relevante (necesitaríamos algo más: coordinación).
- En la Batalla de Sexos $(F, B) \notin S^*$ podría estar justificado por las esperanzas razonables (parte de un equilibrio):
  - m espera $s_w^e = F$ (parte de un equilibrio) y
  - w espera $s_m^e = B$ (también parte de un equilibrio).
- Utilizando el equilibrio para predecir el comportamiento de los jugadores puede llevar a un comportamiento non-equilibrio (acciones$\neq$expectaciones).
- Multiplicidad de equilibrio es un problema grave.

3.- Punto Focal

3.- Punto Focal

- Schelling, T. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 1960.

3.- Punto Focal

- Schelling, T. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 1960.
    - Nobel Prize en Economics en 2005, juntos con R. Aumann.

3.- Punto Focal

- Schelling, T. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 1960.
  - Nobel Prize en Economics en 2005, juntos con R. Aumann.

1 Instituciones Culturales.

3.- Punto Focal

- Schelling, T. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 1960.
  - Nobel Prize en Economics en 2005, juntos con R. Aumann.

1 INSTITUCIONES CULTURALES.

  - Papel de hombre y mujer en la sociedad o profesor y estudiante. Entonces, (F, F) es la predicción correcta. Pero entonces, para predecir un resultado de G necesitamos información adicional (que no está en G).

3.- Punto Focal

- Schelling, T. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 1960.
  - Nobel Prize en Economics en 2005, juntos con R. Aumann.

1. Instituciones Culturales.
   - Papel de hombre y mujer en la sociedad o profesor y estudiante. Entonces, (F, F) es la predicción correcta. Pero entonces, para predecir un resultado de G necesitamos información adicional (que no está en G).
2. Eficiencia. Ayuda a enfocar la atención ((D, R) en el Juego de Coordinación).

3.- Punto Focal

- Schelling, T. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 1960.
  - Nobel Prize en Economics en 2005, juntos con R. Aumann.

1 INSTITUCIONES CULTURALES.

- Papel de hombre y mujer en la sociedad o profesor y estudiante. Entonces, (F, F) es la predicción correcta. Pero entonces, para predecir un resultado de G necesitamos información adicional (que no está en G).

2 EFICIENCIA. Ayuda a enfocar la atención ((D, R) en el Juego de Coordinación).

- Habita used in applications with multiple equilibria.

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

Observación 1 Un argumento de dominar el riesgo va en contra de este criterio de eficiencia.

Observación 1 Un argumento de dominar el riesgo va en contra de este criterio de eficiencia.

- Harsanyi, J. y R. Selten. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. MIT Press, 1988.

$1\backslash 2$	L	R
U	$9,9$	$0,8$
D	$8,0$	$7,7$

Observación 1 Un argumento de dominar el riesgo va en contra de este criterio de eficiencia.

- Harsanyi, J. y R. Selten. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. MIT Press, 1988.

$1\backslash 2$	L	R
U	$9,9$	$0,8$
D	$8,0$	$7,7$

  - $S^* = \{(U,L),(D,R)\}$. Tenemos en cuenta que (U,L) domina (D,R) en el sentido Pareto. Sin embargo, U es más arriesgado para el jugador 1. Suponemos que hay comunicación ante juego y los dos jugadores anuncian (U,L).

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

Observación 1 Un argumento de dominar el riesgo va en contra de este criterio de eficiencia.

- Harsanyi, J. y R. Selten. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. MIT Press, 1988.

$1\backslash 2$	L	R
U	$9,9$	$0,8$
D	$8,0$	$7,7$

  - $S^* = \{(U,L),(D,R)\}$. Tenemos en cuenta que (U,L) domina (D,R) en el sentido Pareto. Sin embargo, U es más arriesgado para el jugador 1. Suponemos que hay comunicación ante juego y los dos jugadores anuncian (U,L).
  - El jugador 2 está interesado en convencer al jugador 1 sobre su intención de jugar U (él obtiene 9 o 8), y por tanto, el 2 insiste sobre la bondad de su acción L porque, *para jugador* 2, U es mejor que D.

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

Observación 1 Un argumento de dominar el riesgo va en contra de este criterio de eficiencia.

- Harsanyi, J. y R. Selten. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. MIT Press, 1988.

$1\backslash 2$	L	R
U	$9,9$	$0,8$
D	$8,0$	$7,7$

  - $S^* = \{(U,L),(D,R)\}$. Tenemos en cuenta que (U,L) domina (D,R) en el sentido Pareto. Sin embargo, U es más arriesgado para el jugador 1. Suponemos que hay comunicación ante juego y los dos jugadores anuncian (U,L).
  - El jugador 2 está interesado en convencer al jugador 1 sobre su intención de jugar U (él obtiene 9 o 8), y por tanto, el 2 insiste sobre la bondad de su acción L porque, *para jugador* 2, U es mejor que D.
  - Ahora, soy el jugador 1 y no estoy seguro en la veracidad del anuncio de 2 sobre su intención de jugar L. Posiblemente, debería jugar D (y obtener 8 o 7 en vez de 9 o 0).

Observación 2 Con más de dos jugadores el papel de eficiencia como punto focal es aún menos evidente.

Observación 2 Con más de dos jugadores el papel de eficiencia como punto focal es aún menos evidente.

- Bernheim, B., B. Peleg, y M. Whinston. "Coalition-proof Equilibrio de Nash I: Concepts," *Journal of Economic Theory* 42, 1987.

A

$1\backslash 2$	L	R
U	$0, 0, 10$	$-5, -5, 0$
D	$-5, -5, 0$	$1, 1, -5$

B

$1\backslash 2$	L	R
U	$-2, -2, 0$	$-5, -5, 0$
D	$-5, -5, 0$	$-1, -1, 5$

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

Observación 2 Con más de dos jugadores el papel de eficiencia como punto focal es aún menos evidente.

- Bernheim, B., B. Peleg, y M. Whinston. "Coalition-proof Equilibrio de Nash I: Concepts," *Journal of Economic Theory* 42, 1987.

A

$1\backslash 2$	L	R
U	$0, 0, 10$	$-5, -5, 0$
D	$-5, -5, 0$	$1, 1, -5$

B

$1\backslash 2$	L	R
U	$-2, -2, 0$	$-5, -5, 0$
D	$-5, -5, 0$	$-1, -1, 5$

- $S^* = \{(U, L, A), (D, R, B)\}$ y (U, L, A) Pareto domina (D, R, B).

Observación 2 Con más de dos jugadores el papel de eficiencia como punto focal es aún menos evidente.

- Bernheim, B., B. Peleg, y M. Whinston. “Coalition-proof Equilibrio de Nash I: Concepts,” *Journal of Economic Theory* 42, 1987.

A

$1\backslash 2$	L	R
U	$0, 0, 10$	$-5, -5, 0$
D	$-5, -5, 0$	$1, 1, -5$

B

$1\backslash 2$	L	R
U	$-2, -2, 0$	$-5, -5, 0$
D	$-5, -5, 0$	$-1, -1, 5$

- $S^* = \{(U, L, A), (D, R, B)\}$ y (U, L, A) Pareto domina (D, R, B).
- Asumimos que los jugadores siguen la teoría de eficiencia sobre elegir entre varios equilibrios de Nash.

Observación 2 (continuación)

Observación 2 (continuación)

- Entonces, fijando la estrategia A del jugador 3, tenemos el juego

$1 \backslash 2$	L	R
U	$0, 0$	$-5, -5$
D	$-5, -5$	$1, 1$

Observación 2 (continuación)

- Entonces, fijando la estrategia A del jugador 3, tenemos el juego

$1\backslash 2$	L	R
U	$0, 0$	$-5, -5$
D	$-5, -5$	$1, 1$

- Pero entonces, (D, R) Pareto domina (U, L).

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

Observación 2 (continuación)

- Entonces, fijando la estrategia A del jugador 3, tenemos el juego

$1\backslash 2$	L	R
U	$0, 0$	$-5, -5$
D	$-5, -5$	$1, 1$

- Pero entonces, (D, R) Pareto domina (U, L).
- Definición de equilibrio por prueba de coalición por inducción sobre el tamaño (y desviación) de coaliciones.

Observación 2 (continuación)

- Entonces, fijando la estrategia A del jugador 3, tenemos el juego

$1\backslash 2$	L	R
U	$0, 0$	$-5, -5$
D	$-5, -5$	$1, 1$

- Pero entonces, (D, R) Pareto domina (U, L).
- Definición de equilibrio por prueba de coalición por inducción sobre el tamaño (y desviación) de coaliciones.
- Problema: puede ser que no exista un equilibrio por prueba de coalición.

3.- Punto Focal (continuación)

3.- Punto Focal (continuación)

3 Equidad (además de eficiencia).

Ejemplo:

3.- Punto Focal (continuación)

3 EQUIDAD (ADEMÁS DE EFICIENCIA).

Ejemplo:

- $I = \{1, 2\}$ tienen que dividir 100 Euros.

3.- Punto Focal (continuación)

3 Equidad (además de eficiencia).

Ejemplo:

- $I = \{1, 2\}$ tienen que dividir 100 Euros.
- $S_1 = S_2 = [0, 100]$.

3.- Punto Focal (continuación)

3 EQUIDAD (ADEMÁS DE EFICIENCIA).

Ejemplo:

- $I = \{1, 2\}$ tienen que dividir 100 Euros.
- $S_1 = S_2 = [0, 100]$.
- $$h_i(s_1, s_2) = \begin{cases} s_i & \text{si } s_1 + s_2 \leq 100 \\ 0 & \text{si } s_1 + s_2 > 100. \end{cases}$$

3.- Punto Focal (continuación)

3 Equidad (además de eficiencia).

Ejemplo:

- $I = \{1, 2\}$ tienen que dividir 100 Euros.
- $S_1 = S_2 = [0, 100]$.
- $$h_i(s_1, s_2) = \begin{cases} s_i & \text{si } s_1 + s_2 \leq 100 \\ 0 & \text{si } s_1 + s_2 > 100. \end{cases}$$
- $S^* = \{(s_1, s_2) \in [0, 100]^2 \mid s_1 = 100 - s_2\} \cup \{(100, 100)\}$.

3.- Punto Focal (continuación)

3 EQUIDAD (ADEMÁS DE EFICIENCIA).

Ejemplo:

- $I = \{1, 2\}$ tienen que dividir 100 Euros.
- $S_1 = S_2 = [0, 100]$.
- $$h_i(s_1, s_2) = \begin{cases} s_i & \text{si } s_1 + s_2 \leq 100 \\ 0 & \text{si } s_1 + s_2 > 100. \end{cases}$$
- $S^* = \{(s_1, s_2) \in [0, 100]^2 \mid s_1 = 100 - s_2\} \cup \{(100, 100)\}$.
- Pero equidad (más eficiencia) da $(50, 50)$ como el punto focal y un equilibrio razonable.

3.- Punto Focal (continuación)

3 EQUIDAD (ADEMÁS DE EFICIENCIA).

Ejemplo:

- $I = \{1,2\}$ tienen que dividir 100 Euros.
- $S_1 = S_2 = [0,100]$.
- $$h_i(s_1,s_2) = \begin{cases} s_i & \text{si } s_1 + s_2 \leq 100 \\ 0 & \text{si } s_1 + s_2 > 100. \end{cases}$$
- $S^* = \{(s_1,s_2) \in [0,100]^2 \mid s_1 = 100 - s_2\} \cup \{(100,100)\}$.
- Pero equidad (más eficiencia) da $(50,50)$ como el punto focal y un equilibrio razonable.
  - Importancia de preferencias sociales (dejando a parte la hipótesis de egoísta).

3.- Punto Focal (continuación)

3.- Punto Focal (continuación)

4 Comunicación ante-juego.

3.- Punto Focal (continuación)

4 COMUNICACIÓN ANTE-JUEGO.

Puede ayudar a generar un punto focal.

3.- Punto Focal (continuación)

4 COMUNICACIÓN ANTE-JUEGO.

Puede ayudar a generar un punto focal.

Ejemplo: Consideramos la Batalla de Sexos donde el hombre anuncia (por la tarde de viernes) donde él piensa ir (pero anuncio no tiene el poder de un compromiso).

- Sean f y b los dos posibles anuncios. Entonces, $\bar{S}_m = \{fF, fB, bF, bB\}$.

3.- Punto Focal (continuación)

4 Comunicación ante-juego.

Puede ayudar a generar un punto focal.

Ejemplo: Consideramos la Batalla de Sexos donde el hombre anuncia (por la tarde de viernes) donde él piensa ir (pero anuncio no tiene el poder de un compromiso).

- Sean f y b los dos posibles anuncios. Entonces, $\bar{S}_m = \{fF, fB, bF, bB\}$.
- $\bar{S}_w = \{FF, FB, BF, BB\}$, donde XY, por ejemplo se refiere a "ir a X si f y a Y si b".

3.- Punto Focal (continuación)

3.- Punto Focal (continuación)

$m \backslash w$	FF	FB	BF	BB
fF	$3,1^{**}$	$3,1^{***}$	$0,0$	$0,0$
fB	$0,0$	$0,0$	$1,3$	$1,3^{*}$
bF	$3,1^{*}$	$0,0$	$3,1^{*}$	$0,0$
bB	$0,0$	$1,3$	$0,0$	$1,3^{**}$

- ¡$\#\bar{S}^* = 6$! Pero solo uno de ellos tiene la propiedad que el anuncio es significativo (m hace lo que ha anunciado: extra * y mejores respuestas de w al anuncio: extra *).

3.- Punto Focal (continuación)

$m \backslash w$	FF	FB	BF	BB
fF	$3, 1^{**}$	$3, 1^{***}$	$0, 0$	$0, 0$
fB	$0, 0$	$0, 0$	$1, 3$	$1, 3^{*}$
bF	$3, 1^{*}$	$0, 0$	$3, 1^{*}$	$0, 0$
bB	$0, 0$	$1, 3$	$0, 0$	$1, 3^{**}$

- ¡$\#\bar{S}^* = 6$! Pero solo uno de ellos tiene la propiedad que el anuncio es significativo (m hace lo que ha anunciado: extra * y mejores respuestas de w al anuncio: extra *).
- El hombre se convierte en árbitro focal.

4.- Convenios sociales estables

4.- Convenios sociales estables

- El juego se repite en el tiempo (juego ficticio, juegos repetitos, etc.).

4.- Convenios sociales estables

- El juego se repite en el tiempo (juego ficticio, juegos repetitos, etc.).
- Muchos jugadores (la interacción estratégica tiende a desaparecer).

4.- Convenios sociales estables

- El juego se repite en el tiempo (juego ficticio, juegos repetitos, etc.).
- Muchos jugadores (la interacción estratégica tiende a desaparecer).
    - Caminando por los pasillos de metro.

2.3.- Interpretación de Equilibrio de Nash

4.- Convenios sociales estables

- El juego se repite en el tiempo (juego ficticio, juegos repetitos, etc.).
- Muchos jugadores (la interacción estratégica tiende a desaparecer).
  - Caminando por los pasillos de metro.
  - Tráfico en autopistas.

4.- Convenios sociales estables

- El juego se repite en el tiempo (juego ficticio, juegos repetitos, etc.).
- Muchos jugadores (la interacción estratégica tiende a desaparecer).
  - Caminando por los pasillos de metro.
  - Tráfico en autopistas.
  - Etc.

2.4.- La Extensión Mixta

2.4.- La Extensión Mixta

- Hay juegos en forma normal que no tienen ningún equilibrio de Nash.

2.4.- La Extensión Mixta

- Hay juegos en forma normal que no tienen ningún equilibrio de Nash.
- Extendiendo los conjuntos de estrategias de los jugadores, obtenemos su existencia para juegos finitos.

2.4.- La Extensión Mixta

- Hay juegos en forma normal que no tienen ningún equilibrio de Nash.
- Extendiendo los conjuntos de estrategias de los jugadores, obtenemos su existencia para juegos finitos.
- Pensamos en un comportamiento razonable en Matching Pennies (la distribución de probabilidad en S_i).

2.4.- La Extensión Mixta

- Hay juegos en forma normal que no tienen ningún equilibrio de Nash.
- Extendiendo los conjuntos de estrategias de los jugadores, obtenemos su existencia para juegos finitos.
- Pensamos en un comportamiento razonable en Matching Pennies (la distribución de probabilidad en S_i).
- Juegos finitos: un juego en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ es *finite* si $\# I < \infty$ y para cada $i \in I$, $\# S_i < \infty$.

2.4.- La Extensión Mixta

- Hay juegos en forma normal que no tienen ningún equilibrio de Nash.
- Extendiendo los conjuntos de estrategias de los jugadores, obtenemos su existencia para juegos finitos.
- Pensamos en un comportamiento razonable en Matching Pennies (la distribución de probabilidad en S_i).
- Juegos finitos: un juego en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ es *finite* si $\#I < \infty$ y para cada $i \in I$, $\#S_i < \infty$.

2.4.- La Extensión Mixta

- Hay juegos en forma normal que no tienen ningún equilibrio de Nash.
- Extendiendo los conjuntos de estrategias de los jugadores, obtenemos su existencia para juegos finitos.
- Pensamos en un comportamiento razonable en Matching Pennies (la distribución de probabilidad en S_i).
- Juegos finitos: un juego en forma normal $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I})$ es *finite* si $\#I < \infty$ y para cada $i \in I$, $\#S_i < \infty$.

Definición Sea $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I})$ un juego finito en forma normal. Definimos la *extensión mixta de G* como el juego en forma normal

$$G^* = (I, (\Sigma_i)_{i\in I}, (H_i)_{i\in I}),$$

where

2.4.- La Extensión Mixta

$$
\begin{aligned}
\Sigma_i &= \{\sigma_i : S_i \longrightarrow [0,1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\} \\
&\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\#S_i} \mid x_j \geq 0 \text{ para cada } j = 1, \ldots, \#S_i \text{ y } \sum_{j=1}^{\#S} x_j = 1\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_i &= \{\sigma_i : S_i \longrightarrow [0,1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\} \\
&\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\#S_i} \mid x_j \geq 0 \text{ para cada } j = 1, \ldots, \#S_i \text{ y } \sum_{j=1}^{\#S} x_j = 1\}.
\end{aligned}
$$

- σ_i es la distribución de probabilidad en S_i (un conjunto finito).

2.4.- La Extensión Mixta

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= \{\sigma_i : S_i \longrightarrow [0,1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\} \\ &\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\#S_i} \mid x_j \geq 0 \text{ para cada } j = 1, ..., \#S_i \text{ y } \sum_{j=1}^{\#S} x_j = 1\}.\end{aligned}$$

- σ_i es la distribución de probabilidad en S_i (un conjunto finito).
- Definimos $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in I}$ y conjunto $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$.

2.4.- La Extensión Mixta

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= \{\sigma_i : S_i \longrightarrow [0,1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\} \\ &\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\# S_i} \mid x_j \geq 0 \text{ para cada } j = 1, \ldots, \# S_i \text{ y } \sum_{j=1}^{\# S} x_j = 1\}.\end{aligned}$$

- σ_i es la distribución de probabilidad en S_i (un conjunto finito).
- Definimos $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in I}$ y conjunto $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$.
- Definimos $H_i : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ como los pagos esperados de jugar en línea con σ. Es decir, para cada $\sigma \in \Sigma$,

$$H_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \prod_{j \in I} \sigma_j(s_j) \cdot h_i(s).$$

2.4.- La Extensión Mixta

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= \{\sigma_i : S_i \longrightarrow [0,1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\} \\ &\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\#S_i} \mid x_j \geq 0 \text{ para cada } j = 1, \ldots, \#S_i \text{ y } \sum_{j=1}^{\#S} x_j = 1\}.\end{aligned}$$

- σ_i es la distribución de probabilidad en S_i (un conjunto finito).
- Definimos $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in I}$ y conjunto $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$.
- Definimos $H_i : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ como los pagos esperados de jugar en línea con σ. Es decir, para cada $\sigma \in \Sigma$,

$$H_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \prod_{j \in I} \sigma_j(s_j) \cdot h_i(s).$$

- Observamos que asumimos que σ_i son independientes; es decir, la probabilidad que está jugado s es igual a $\prod_{j \in I} \sigma_j(s_j)$.

Matching Pennies

Matching Pennies

- Sea $p \in \Sigma_1$ y $q \in \Sigma_2$ (probabilidades de H).

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & q & 1-q \\
 & 1\backslash 2 & Cr & Cz \\
\hline
p & Cr & 1,-1 & -1,1 \\
\hline
1-p & Cz & -1,1 & 1,-1 \\
\hline
\end{array}
$$

Matching Pennies

- Sea $p \in \Sigma_1$ y $q \in \Sigma_2$ (probabilidades de H).

$$\begin{array}{ccc|c|c|}
 & & q & 1-q \\
 & 1\backslash 2 & Cr & Cz \\
\cline{3-4}
p & Cr & 1,-1 & -1,1 \\
\cline{3-4}
1-p & Cz & -1,1 & 1,-1 \\
\cline{3-4}
\end{array}$$

-

$$\begin{aligned}
H_1(p,q) &= pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) \\
&= pq - p + pq - q + pq + 1 - p - q + pq \\
&= 4pq - 2p - 2q + 1 \\
&= -H_2(p,q).
\end{aligned}$$

Matching Pennies

- Sea $p \in \Sigma_1$ y $q \in \Sigma_2$ (probabilidades de H).

$$\begin{array}{cccc} & & q & 1-q \\ & 1\backslash 2 & Cr & Cz \\ p & Cr & 1,-1 & -1,1 \\ 1-p & Cz & -1,1 & 1,-1 \end{array}$$

- $$\begin{aligned} H_1(p,q) &= pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) \\ &= pq - p + pq - q + pq + 1 - p - q + pq \\ &= 4pq - 2p - 2q + 1 \\ &= -H_2(p,q). \end{aligned}$$

- $G^* = (\{1,2\}, ([0,1],[0,1]), (H_1,H_2))$.

2.4.- La Extensión Mixta

- Dado un juego en forma normal G, construir su extensión mixta G^*.

2.4.- La Extensión Mixta

- Dado un juego en forma normal G, construir su extensión mixta G^*.
- G^* también es un juego en forma normal.

2.4.- La Extensión Mixta

- Dado un juego en forma normal G, construir su extensión mixta G^*.
- G^* también es un juego en forma normal.
- Aplicar el concepto de equilibrio de Nash a G^*.

- Dado un juego en forma normal G, construir su extensión mixta G^*.
- G^* también es un juego en forma normal.
- Aplicar el concepto de equilibrio de Nash a G^*.
- Sea Σ^* el conjunto de equilibrios de Nash de G^*. Es decir,

$$\Sigma^* = \{\sigma \in \Sigma \mid \text{para cada } i \in I,\ H_i(\sigma) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ para cada } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}$$

2.4.- La Extensión Mixta

- Dado un juego en forma normal G, construir su extensión mixta G^*.
- G^* también es un juego en forma normal.
- Aplicar el concepto de equilibrio de Nash a G^*.
- Sea Σ^* el conjunto de equilibrios de Nash de G^*. Es decir,

$$\Sigma^* = \{\sigma \in \Sigma \mid \text{para cada } i \in I,\ H_i(\sigma) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ para cada } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}$$

- Nash. J. "Equilibrium Points in $n-$Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 1950.

2.4.- La Extensión Mixta

- Dado un juego en forma normal G, construir su extensión mixta G^*.
- G^* también es un juego en forma normal.
- Aplicar el concepto de equilibrio de Nash a G^*.
- Sea Σ^* el conjunto de equilibrios de Nash de G^*. Es decir,

$$\Sigma^* = \{\sigma \in \Sigma \mid \text{para cada } i \in I,\ H_i(\sigma) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ para cada } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}$$

- Nash. J. "Equilibrium Points in $n-$Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 1950.

2.4.- La Extensión Mixta

- Dado un juego en forma normal G, construir su extensión mixta G^*.
- G^* también es un juego en forma normal.
- Aplicar el concepto de equilibrio de Nash a G^*.
- Sea Σ^* el conjunto de equilibrios de Nash de G^*. Es decir,

$$\Sigma^* = \{\sigma \in \Sigma \mid \text{para cada } i \in I,\ H_i(\sigma) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ para cada } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}$$

- Nash. J. "Equilibrium Points in $n-$Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 1950.

Theorem

(Nash, 1950) Sea G un juego finito juego en forma normal. Entonces, $\Sigma^* \neq \varnothing$.

Idea de la prueba Sea G un juego finito en forma normal.

Idea de la prueba Sea G un juego finito en forma normal.

- Para cada $i \in I$, define la correspondencia de mejor respuesta $B_i : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_i$ en la manera siguiente: para cualquier $\sigma \in \Sigma$,

$$B_i(\sigma) = \{\sigma_i' \in \Sigma_i \mid H_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ para cada } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}.$$

Idea de la prueba Sea G un juego finito en forma normal.

- Para cada $i \in I$, define la correspondencia de mejor respuesta $B_i : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_i$ en la manera siguiente: para cualquier $\sigma \in \Sigma$,

$$B_i(\sigma) = \{\sigma_i' \in \Sigma_i \mid H_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ para cada } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}.$$

- Define la correspondencia de mejor respuesta $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$ en la manera siguiente: para cualquier $\sigma \in \Sigma$,

$$B(\sigma) = (B_1(\sigma), ..., B_n(\sigma)).$$

Idea de la prueba Sea G un juego finito en forma normal.

- Para cada $i \in I$, define la correspondencia de mejor respuesta $B_i : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_i$ en la manera siguiente: para cualquier $\sigma \in \Sigma$,

$$B_i(\sigma) = \{\sigma_i' \in \Sigma_i \mid H_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ para cada } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}.$$

- Define la correspondencia de mejor respuesta $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$ en la manera siguiente: para cualquier $\sigma \in \Sigma$,

$$B(\sigma) = (B_1(\sigma), ..., B_n(\sigma)).$$

- El conjunto de equilibrios de Nash de G^* es el conjunto de puntos fijos de B; es decir,

$$\sigma^* \in \Sigma^* \text{ si y only si } \sigma^* \in B(\sigma^*).$$

Idea de la prueba Sea G un juego finito en forma normal.

- Para cada $i \in I$, define la correspondencia de mejor respuesta $B_i : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_i$ en la manera siguiente: para cualquier $\sigma \in \Sigma$,

$$B_i(\sigma) = \{\sigma_i' \in \Sigma_i \mid H_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ para cada } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}.$$

- Define la correspondencia de mejor respuesta $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$ en la manera siguiente: para cualquier $\sigma \in \Sigma$,

$$B(\sigma) = (B_1(\sigma), ..., B_n(\sigma)).$$

- El conjunto de equilibrios de Nash de G^* es el conjunto de puntos fijos de B; es decir,

$$\sigma^* \in \Sigma^* \text{ si y only si } \sigma^* \in B(\sigma^*).$$

- Es posible demostrar que si G es finito entonces B tiene al menos un punto fijo.

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

- **Observación** (Muy importante; en La lista de ejercicios #2) Asumimos $\sigma^* \in \Sigma^*$ y sean $i \in I$ y $\bar{s}_i, \hat{s}_i \in S_i$ tal que $\sigma_i^*(\bar{s}_i), \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$ entonces, $H_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^*) = H_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*)$.

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

- **Observación** (Muy importante; en La lista de ejercicios #2) Asumimos $\sigma^* \in \Sigma^*$ y sean $i \in I$ y $\bar{s}_i, \hat{s}_i \in S_i$ tal que $\sigma_i^*(\bar{s}_i), \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$ entonces, $H_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^*) = H_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*)$.
- Formalmente, en equilibrio el jugador i asigna probabilidades positivas solo a las estrategias puras entre las cuales i es indiferente y por lo tanto, i deja a la naturaleza elegir.

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

- **Observación** (Muy importante; en La lista de ejercicios #2) Asumimos $\sigma^* \in \Sigma^*$ y sean $i \in I$ y $\bar{s}_i, \hat{s}_i \in S_i$ tal que $\sigma_i^*(\bar{s}_i), \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$ entonces, $H_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^*) = H_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*)$.
- Formalmente, en equilibrio el jugador i asigna probabilidades positivas solo a las estrategias puras entre las cuales i es indiferente y por lo tanto, i deja a la naturaleza elegir.
- En particular, sea $supp(\sigma_i^*) = \{s_i \in S_i \mid \sigma_i^*(s_i) > 0\}$. Entonces, i es indiferente entre todas las estrategias mixtas que incluyen $supp(\sigma_i^*)$.

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

- **Observación** (Muy importante; en La lista de ejercicios #2) Asumimos $\sigma^* \in \Sigma^*$ y sean $i \in I$ y $\bar{s}_i, \hat{s}_i \in S_i$ tal que $\sigma_i^*(\bar{s}_i), \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$ entonces, $H_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^*) = H_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*)$.

- Formalmente, en equilibrio el jugador i asigna probabilidades positivas solo a las estrategias puras entre las cuales i es indiferente y por lo tanto, i deja a la naturaleza elegir.

- En particular, sea $supp(\sigma_i^*) = \{s_i \in S_i \mid \sigma_i^*(s_i) > 0\}$. Entonces, i es indiferente entre todas las estrategias mixtas que incluyen $supp(\sigma_i^*)$.

- Esta observación nos ayudará a computar equilibrio de Nash de la extensión mixta.

Ejemplo: la Batalla de Sexos

		q	$1-q$
	$m \backslash w$	F	B
p	F	$3,1$	$0,0$
$1-p$	B	$0,0$	$1,3$

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

$$\begin{array}{ccc|c|c|}
 & & q & 1-q \\
 & m \backslash w & F & B \\
\cline{3-4}
p & F & 3,1 & 0,0 \\
\cline{3-4}
1-p & B & 0,0 & 1,3 \\
\cline{3-4}
\end{array}$$

Ya sabemos que $(1,1),(0,0) \in \Sigma^*$. Asumimos $p, q \in (0,1)$ y $(p,q) \in \Sigma^*$. Entonces,

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

		q	$1-q$
	$m \backslash w$	F	B
p	F	$3,1$	$0,0$
$1-p$	B	$0,0$	$1,3$

Ya sabemos que $(1,1),(0,0) \in \Sigma^*$. Asumimos $p,q \in (0,1)$ y $(p,q) \in \Sigma^*$. Entonces,

- $H_m(F,q) = 3q$ y $H_m(B,q) = 1-q$. Por la Observación anterior, si $p \in (0,1)$ entonces, $3q = 1-q$. Por lo tanto, $q^* = \frac{1}{4}$.

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

$$\begin{array}{ccc|c|c|}
 & & q & 1-q \\
 & m\backslash w & F & B \\
\cline{3-4}
p & F & 3,1 & 0,0 \\
\cline{3-4}
1-p & B & 0,0 & 1,3 \\
\cline{3-4}
\end{array}$$

Ya sabemos que $(1,1),(0,0) \in \Sigma^*$. Asumimos $p, q \in (0,1)$ y $(p,q) \in \Sigma^*$. Entonces,

- $H_m(F,q) = 3q$ y $H_m(B,q) = 1-q$. Por la Observación anterior, si $p \in (0,1)$ entonces, $3q = 1-q$. Por lo tanto, $q^* = \frac{1}{4}$.
    - ¡La indiferencia de m entre F y B nos da estrategia mixta del equilibrio para w!!

		q	$1-q$
	$m \backslash w$	F	B
p	F	$3,1$	$0,0$
$1-p$	B	$0,0$	$1,3$

Ya sabemos que $(1,1),(0,0) \in \Sigma^*$. Asumimos $p,q \in (0,1)$ y $(p,q) \in \Sigma^*$. Entonces,

- $H_m(F,q) = 3q$ y $H_m(B,q) = 1-q$. Por la Observación anterior, si $p \in (0,1)$ entonces, $3q = 1-q$. Por lo tanto, $q^* = \frac{1}{4}$.
    - ¡La indiferencia de m entre F y B nos da estrategia mixta del equilibrio para w!!
- $H_w(p,F) = p$ y $H_w(p,B) = 3(1-p)$. Por la Observación anterior, si $q \in (0,1)$ entonces, $p = 3(1-p)$. Por lo tanto, $p^* = \frac{3}{4}$.

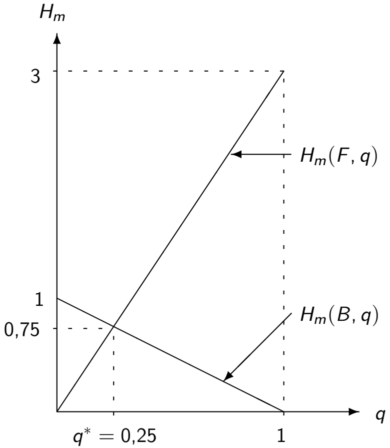
2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

		q	$1-q$
	$m \backslash w$	F	B
p	F	$3,1$	$0,0$
$1-p$	B	$0,0$	$1,3$

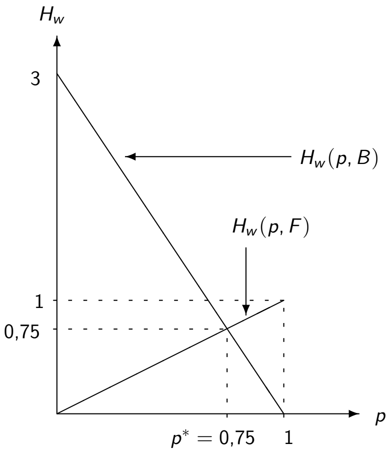
Ya sabemos que $(1,1),(0,0) \in \Sigma^*$. Asumimos $p,q \in (0,1)$ y $(p,q) \in \Sigma^*$. Entonces,

- $H_m(F,q) = 3q$ y $H_m(B,q) = 1-q$. Por la Observación anterior, si $p \in (0,1)$ entonces, $3q = 1-q$. Por lo tanto, $q^* = \frac{1}{4}$.
  - ¡La indiferencia de m entre F y B nos da estrategia mixta del equilibrio para w!!
- $H_w(p,F) = p$ y $H_w(p,B) = 3(1-p)$. Por la Observación anterior, si $q \in (0,1)$ entonces, $p = 3(1-p)$. Por lo tanto, $p^* = \frac{3}{4}$.
  - la indiferencia de w entre F y B nos da la estrategia mixta del equilibrio para m!!

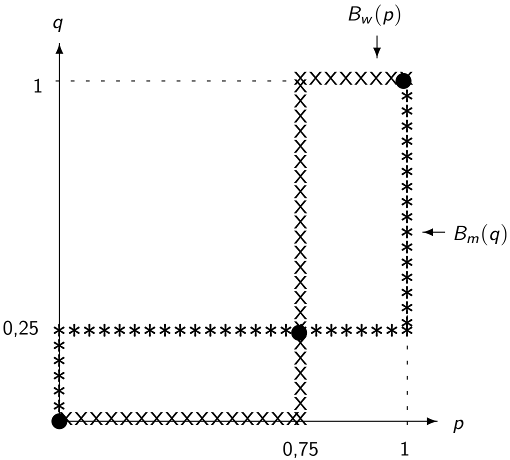
2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

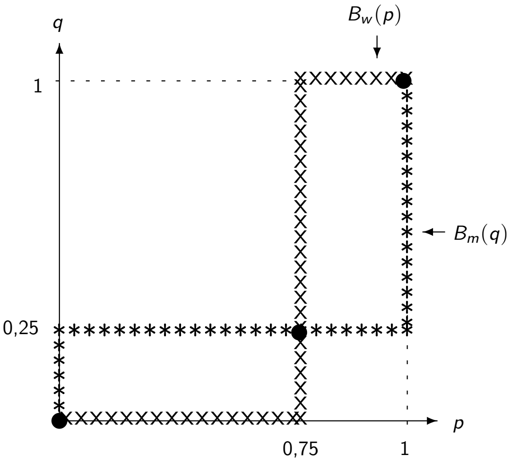


2.5.- Computación de Equilibrio de Nash



2.5.- Computación de Equilibrio de Nash





$$\Sigma^* = \{(0,0),(1,1),(0{,}75, 0,25)\}.$$

- Las probabilidades en S del equilibrio mixto:

- Las probabilidades en S del equilibrio mixto:

- Las probabilidades en S del equilibrio mixto:

		$1/4$	$3/4$
	$m \backslash w$	F	B
$3/4$	F	$3/16$	$9/16$
$1/4$	B	$1/16$	$3/16$

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

- Las probabilidades en S del equilibrio mixto:

		$1/4$	$3/4$
	$m \backslash w$	F	B
$3/4$	F	$3/16$	$9/16$
$1/4$	B	$1/16$	$3/16$

- Los pagos en el equilibrio:

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

- Las probabilidades en S del equilibrio mixto:

		$1/4$	$3/4$
	$m \backslash w$	F	B
$3/4$	F	$3/16$	$9/16$
$1/4$	B	$1/16$	$3/16$

- Los pagos en el equilibrio:
  - $H_m(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{3}{16}3 + \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

- Las probabilidades en S del equilibrio mixto:

		$1/4$	$3/4$
	$m \backslash w$	F	B
$3/4$	F	$3/16$	$9/16$
$1/4$	B	$1/16$	$3/16$

- Los pagos en el equilibrio:
  - $H_m(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{3}{16}3 + \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.
  - $H_w(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16}3 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

2.5.- Computación de Equilibrio de Nash

- Las probabilidades en S del equilibrio mixto:

		1/4	3/4
	$m \backslash w$	F	B
3/4	F	3/16	9/16
1/4	B	1/16	3/16

- Los pagos en el equilibrio:
  - $H_m(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{3}{16}3 + \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.
  - $H_w(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16}3 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.
  - El equilibrio de estrategias mixtas es dominado en el sentido Pareto por dos equilibrios de estrategias puras.

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- von Neumann, J. y O. Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- von Neumann, J. y O. Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.
- El juego en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ es un juego de dos personas de suma cero si $\# I = 2$ y, para cada $s \in S$, $h_1(s) = -h_2(s)$.

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- von Neumann, J. y O. Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.

- El juego en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ es un juego de dos personas de suma cero si $\# I = 2$ y, para cada $s \in S$, $h_1(s) = -h_2(s)$.

- **Observación 1** La extensión mixta de un juego de dos personas de suma cero; es decir, para cada $(\sigma, \tau) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$,

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- von Neumann, J. y O. Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.

- El juego en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ es un juego de dos personas de suma cero si $\#I = 2$ y, para cada $s \in S$, $h_1(s) = -h_2(s)$.

- **Observación 1** La extensión mixta de un juego de dos personas de suma cero; es decir, para cada $(\sigma, \tau) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$,

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- von Neumann, J. y O. Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.
- El juego en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ es un juego de dos personas de suma cero si $\# I = 2$ y, para cada $s \in S$, $h_1(s) = -h_2(s)$.
- **Observación 1** La extensión mixta de un juego de dos personas de suma cero; es decir, para cada $(\sigma, \tau) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$,

$$\begin{aligned} H_1(\sigma, \tau) &= \textstyle\sum_{s \in S} \sigma(s_1)\tau(s_2)h_1(s) \\ &= \textstyle\sum_{s \in S} \sigma(s_1)\tau(s_2)(-h_2(s)) \\ &= -\textstyle\sum_{s \in S} \sigma(s_1)\tau(s_2)h_2(s) \\ &= -H_2(\sigma, \tau). \end{aligned}$$

- **Observación 2** Nash (1950): si G es finito, $\Sigma^* \neq \varnothing$.

- **Observación 2** Nash (1950): si G es finito, $\Sigma^* \neq \varnothing$.

- **Observación 2** Nash (1950): si G es finito, $\Sigma^* \neq \varnothing$.
- **Observación 3** Cada extensión mixta de juego de dos personas de suma cero es perfectamente competitiva (vea La Lista de Ejercicios); es decir, para cada $\sigma, \sigma' \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} H_1(\sigma) \geq H_1(\sigma') \quad &\Longleftrightarrow -H_2(\sigma) \geq -H_2(\sigma') \\ &\Longleftrightarrow H_2(\sigma) \leq H_2(\sigma'). \end{aligned}$$

- **Observación 2** Nash (1950): si G es finito, $\Sigma^* \neq \varnothing$.
- **Observación 3** Cada extensión mixta de juego de dos personas de suma cero es perfectamente competitiva (vea La Lista de Ejercicios); es decir, para cada $\sigma, \sigma' \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} H_1(\sigma) \geq H_1(\sigma') \quad &\Longleftrightarrow -H_2(\sigma) \geq -H_2(\sigma') \\ &\Longleftrightarrow H_2(\sigma) \leq H_2(\sigma'). \end{aligned}$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- **Observación 2** Nash (1950): si G es finito, $\Sigma^* \neq \varnothing$.
- **Observación 3** Cada extensión mixta de juego de dos personas de suma cero es perfectamente competitiva (vea La Lista de Ejercicios); es decir, para cada $\sigma, \sigma' \in \Sigma$,

$$H_1(\sigma) \geq H_1(\sigma') \iff -H_2(\sigma) \geq -H_2(\sigma')$$

$$\iff H_2(\sigma) \leq H_2(\sigma').$$

Por lo tanto, si $\sigma, \sigma' \in \Sigma^*$ entonces,

- $H_1(\sigma) = H_1(\sigma') = -H_2(\sigma) = -H_2(\sigma')$.

- **Observación 2** Nash (1950): si G es finito, $\Sigma^* \neq \varnothing$.
- **Observación 3** Cada extensión mixta de juego de dos personas de suma cero es perfectamente competitiva (vea La Lista de Ejercicios); es decir, para cada $\sigma, \sigma' \in \Sigma$,

$$H_1(\sigma) \geq H_1(\sigma') \iff -H_2(\sigma) \geq -H_2(\sigma')$$

$$\iff H_2(\sigma) \leq H_2(\sigma').$$

  Por lo tanto, si $\sigma, \sigma' \in \Sigma^*$ entonces,

  - $H_1(\sigma) = H_1(\sigma') = -H_2(\sigma) = -H_2(\sigma')$.
  - $(\sigma_1, \sigma_2'), (\sigma_1', \sigma_2) \in \Sigma^*$.

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Objetivo: declarar y comprobar (utilizando el teorema de Nash) el teorema Minimax (vNM, 1944).

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Objetivo: declarar y comprobar (utilizando el teorema de Nash) el teorema Minimax (vNM, 1944).
- Sea G un juego de dos personas de suma cero. Consideramos G^*, y seamos absolutamente extremos sobre las expectativas del jugador 1 sobre el comportamiento del jugador 2.

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Objetivo: declarar y comprobar (utilizando el teorema de Nash) el teorema Minimax (vNM, 1944).
- Sea G un juego de dos personas de suma cero. Consideramos G^*, y seamos absolutamente extremos sobre las expectativas del jugador 1 sobre el comportamiento del jugador 2.
- Asumimos que el jugador 1 es absolutamente *pesimista*; es decir, él piensa que el jugador 2 adivina su estrategia correctamente (o equivalentemente, que él primero elige la estrategia, y después de saberla, el jugador 2 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacia atrás ,

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Objetivo: declarar y comprobar (utilizando el teorema de Nash) el teorema Minimax (vNM, 1944).
- Sea G un juego de dos personas de suma cero. Consideramos G^*, y seamos absolutamente extremos sobre las expectativas del jugador 1 sobre el comportamiento del jugador 2.
- Asumimos que el jugador 1 es absolutamente *pesimista*; es decir, él piensa que el jugador 2 adivina su estrategia correctamente (o equivalentemente, que él primero elige la estrategia, y después de saberla, el jugador 2 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacia atrás ,
  - dado $q_1 \in \Sigma_1$,

$$\max_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2) \text{ es equivalente a } \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2),$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Objetivo: declarar y comprobar (utilizando el teorema de Nash) el teorema Minimax (vNM, 1944).
- Sea G un juego de dos personas de suma cero. Consideramos G^*, y seamos absolutamente extremos sobre las expectativas del jugador 1 sobre el comportamiento del jugador 2.
- Asumimos que el jugador 1 es absolutamente *pesimista*; es decir, él piensa que el jugador 2 adivina su estrategia correctamente (o equivalentemente, que él primero elige la estrategia, y después de saberla, el jugador 2 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacia atrás ,
    - dado $q_1 \in \Sigma_1$,
    $$\max_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2) \text{ es equivalente a } \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2),$$
    - y entonces, el pago (más grande) del jugador 1 siendo pesimista es
    $$\max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2). \qquad \text{(P.1)}$$

- Del mismo modo, asumimos que el jugador 2 es absolutamente *pesimista*; *i.e.*, él piensa que el jugador 1 adivina su estrategia correctamente (o equivalentemente, que él primero elige su estrategia, y después de saberla, el jugador 1 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacía atrás,

- Del mismo modo, asumimos que el jugador 2 es absolutamente *pesimista*; *i.e.*, él piensa que el jugador 1 adivina su estrategia correctamente (o equivalentemente, que él primero elige su estrategia, y después de saberla, el jugador 1 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacía atrás,
  - dado $q_2 \in \Sigma_2$,

$$\max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \text{ es equivalente a } \min_{q_1 \in \Sigma_1} H_2(q_1, q_2),$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Del mismo modo, asumimos que el jugador 2 es absolutamente *pesimista*; *i.e.*, él piensa que el jugador 1 adivina su estrategia correctamente (o equivalentemente, que él primero elige su estrategia, y después de saberla, el jugador 1 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacía atrás,
  - dado $q_2 \in \Sigma_2$,

$$\max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \text{ es equivalente a } \min_{q_1 \in \Sigma_1} H_2(q_1, q_2),$$

  - y entonces, el pago (más grande) del jugador 2 siendo pesimista es

$$\max_{q_2 \in \Sigma_2} \min_{q_1 \in \Sigma_1} H_2(q_1, q_2). \tag{P.2}$$

- Sin embargo, el jugador 1 podría ser absolutamente *optimista*; es decir, él piensa que él puede adivinar correctamente la estrategia del jugador 2 (o equivalentemente, que el jugador 2 primero elige su estrategia, y después de saberla, el jugador 1 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacía atrás,

- Sin embargo, el jugador 1 podría ser absolutamente *optimista*; es decir, él piensa que él puede adivinar correctamente la estrategia del jugador 2 (o equivalentemente, que el jugador 2 primero elige su estrategia, y después de saberla, el jugador 1 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacía atrás,
    - dado $q_2 \in \Sigma_2$,

$$\max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2),$$

- Sin embargo, el jugador 1 podría ser absolutamente *optimista*; es decir, él piensa que él puede adivinar correctamente la estrategia del jugador 2 (o equivalentemente, que el jugador 2 primero elige su estrategia, y después de saberla, el jugador 1 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacía atrás,
  - dado $q_2 \in \Sigma_2$,
  $$\max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2),$$
  - y entonces, el jugador 2 se comportará según su interés (recordamos que $\min H_1 \equiv \max H_2$); por lo tanto, el pago (mínimo) del jugador 1 siendo optimista es
  $$\min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2). \tag{0.1}$$

- Del mismo modo, asumimos que el jugador 2 es absolutamente *optimista*; es decir, él piensa que puede adivinar correctamente la estrategia del jugador 1 (o equivalentemente, que el jugador 1 primero elige su estrategia, y después de saberla el jugador 2 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacia atrás,

- Del mismo modo, asumimos que el jugador 2 es absolutamente *optimista*; es decir, él piensa que puede adivinar correctamente la estrategia del jugador 1 (o equivalentemente, que el jugador 1 primero elige su estrategia, y después de saberla el jugador 2 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacia atrás,
  - dado $q_1 \in \Sigma_1$,

$$\max_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2),$$

- Del mismo modo, asumimos que el jugador 2 es absolutamente *optimista*; es decir, él piensa que puede adivinar correctamente la estrategia del jugador 1 (o equivalentemente, que el jugador 1 primero elige su estrategia, y después de saberla el jugador 2 elige su estrategia óptima). Entonces, por inducción hacia atrás,
  - dado $q_1 \in \Sigma_1$,
  $$\max_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2),$$
  - y entonces, el jugador 1 se comportará según su interés (recordamos que $\max H_1 \equiv \min H_2$); por lo tanto, el pago (mínimo) del jugador 2 siendo optimista es
  $$\min_{q_1 \in \Sigma_1} \max_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2). \tag{O.2}$$

- **Hecho** (para cualquier G, siempre se cumple) El pago para un optimista es mayor o igual al pago de un pesimista;

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- **Hecho** (para cualquier G, siempre se cumple) El pago para un optimista es mayor o igual al pago de un pesimista;

- **Hecho** (para cualquier G, siempre se cumple) El pago para un optimista es mayor o igual al pago de un pesimista;es decir,

$$\text{(O.1)} \quad \min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \quad \geq \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) \quad \text{(P.1)}$$

$$\text{(O.2)} \quad \min_{q_1 \in \Sigma_1} \max_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2) \quad \geq \max_{q_2 \in \Sigma_2} \min_{q_1 \in \Sigma_1} H_2(q_1, q_2) \quad \text{(P.2)}$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Demostramos que $\min\limits_{q_2 \in \Sigma_2} \max\limits_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \geq \max\limits_{q_1 \in \Sigma_1} \min\limits_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)$.

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Demostramos que $\min\limits_{q_2 \in \Sigma_2} \max\limits_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \geq \max\limits_{q_1 \in \Sigma_1} \min\limits_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)$.
- Sea $\bar{q}_2 \in \Sigma_2$ arbitrario. Entonces, para cada $q_1 \in \Sigma_1$,

$$\underbrace{H_1(q_1, \bar{q}_2)}_{\text{function of } q_1} \geq \underbrace{\min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)}_{\text{function of } q_1}.$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Demostramos que $\min\limits_{q_2 \in \Sigma_2} \max\limits_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \geq \max\limits_{q_1 \in \Sigma_1} \min\limits_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)$.
- Sea $\bar{q}_2 \in \Sigma_2$ arbitrario. Entonces, para cada $q_1 \in \Sigma_1$,

$$\underbrace{H_1(q_1, \bar{q}_2)}_{\text{function of } q_1} \geq \underbrace{\min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)}_{\text{function of } q_1}.$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Demostramos que $\min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \geq \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)$.
- Sea $\bar{q}_2 \in \Sigma_2$ arbitrario. Entonces, para cada $q_1 \in \Sigma_1$,

$$\underbrace{H_1(q_1, \bar{q}_2)}_{\text{function of } q_1} \geq \underbrace{\min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)}_{\text{function of } q_1}.$$

Por lo tanto,

$$\underbrace{\max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, \bar{q}_2)}_{\text{function of } \bar{q}_2} \geq \underbrace{\max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)}_{\text{a number}}.$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Demostramos que $\min_{q_2\in\Sigma_2}\max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,q_2) \geq \max_{q_1\in\Sigma_1}\min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(q_1,q_2)$.
- Sea $\bar{q}_2 \in \Sigma_2$ arbitrario. Entonces, para cada $q_1 \in \Sigma_1$,

$$\underbrace{H_1(q_1,\bar{q}_2)}_{\text{function of } q_1} \geq \underbrace{\min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(q_1,q_2)}_{\text{function of } q_1}.$$

Por lo tanto,

$$\underbrace{\max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,\bar{q}_2)}_{\text{function of } \bar{q}_2} \geq \underbrace{\max_{q_1\in\Sigma_1}\min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(q_1,q_2)}_{\text{a number}}.$$

Pero esto se cumple para cualquier $\bar{q}_2 \in \Sigma_2$. Así,

$$\min_{q_2\in\Sigma_2}\max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,q_2) \geq \max_{q_1\in\Sigma_1}\min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(q_1,q_2).$$

- En equilibrio, los pagos de optimista y pesimista coinciden.

Theorem

El Teorema Minimax (vNM, 1944).

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

Theorem

El Teorema Minimax (vNM, 1944).

Sea G un juego finito de dos personas de suma cero. Entonces, existen $v \in \mathbb{R}$, el valor de G, $p_1 \in \Sigma_1$ y $p_2 \in \Sigma_2$ (estrategias óptimas) tal que para cualesquiera $q_1 \in \Sigma_1$ y $q_2 \in \Sigma_2$:

Theorem

El Teorema Minimax (vNM, 1944).

Sea G un juego finito de dos personas de suma cero. Entonces, existen $v \in \mathbb{R}$, el valor de G, $p_1 \in \Sigma_1$ y $p_2 \in \Sigma_2$ (estrategias óptimas) tal que para cualesquiera $q_1 \in \Sigma_1$ y $q_2 \in \Sigma_2$:

(i) $H_1(p_1, q_2) \geq v$.

Theorem

El Teorema Minimax (vNM, 1944).

Sea G un juego finito de dos personas de suma cero. Entonces, existen $v \in \mathbb{R}$, el valor de G, $p_1 \in \Sigma_1$ y $p_2 \in \Sigma_2$ (estrategias óptimas) tal que para cualesquiera $q_1 \in \Sigma_1$ y $q_2 \in \Sigma_2$:

(i) $H_1(p_1, q_2) \geq v$.

(ii) $H_2(q_1, p_2) \geq -v$ ($\Longleftrightarrow H_1(q_1, p_2) \leq v$).

Theorem

El Teorema Minimax (vNM, 1944).

Sea G un juego finito de dos personas de suma cero. Entonces, existen $v \in \mathbb{R}$, el valor de G, $p_1 \in \Sigma_1$ y $p_2 \in \Sigma_2$ (estrategias óptimas) tal que para cualesquiera $q_1 \in \Sigma_1$ y $q_2 \in \Sigma_2$:

(i) $H_1(p_1, q_2) \geq v$.

(ii) $H_2(q_1, p_2) \geq -v$ ($\Longleftrightarrow H_1(q_1, p_2) \leq v$).

(iii) $\min\limits_{q_2 \in \Sigma_2} \max\limits_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) = \max\limits_{q_1 \in \Sigma_1} \min\limits_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) = v$.

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

Prueba (moderna, utilizando el Teorema de Nash):

Prueba (moderna, utilizando el Teorema de Nash):

- Sea $(p_1, p_2) \in \Sigma^*$ ($\neq \varnothing$ por el Teorema de Nash).

Prueba (moderna, utilizando el Teorema de Nash):

- Sea $(p_1, p_2) \in \Sigma^*$ ($\neq \varnothing$ por el Teorema de Nash).
- Definimos $v = H_1(p_1, p_2)$.

Prueba (moderna, utilizando el Teorema de Nash):

- Sea $(p_1, p_2) \in \Sigma^*$ ($\neq \emptyset$ por el Teorema de Nash).
- Definimos $v = H_1(p_1, p_2)$.
- Dado que (p_1, p_2) es un equilibrio de Nash de G^*,

$$v = H_1(p_1, p_2) \geq H_1(q_1, p_2)$$

para cada $q_1 \in \Sigma_1$. Pero esto es (ii).

Prueba (moderna, utilizando el Teorema de Nash):

- Sea $(p_1, p_2) \in \Sigma^*$ ($\neq \varnothing$ por el Teorema de Nash).
- Definimos $v = H_1(p_1, p_2)$.
- Dado que (p_1, p_2) es un equilibrio de Nash de G^*,
$$v = H_1(p_1, p_2) \geq H_1(q_1, p_2)$$
para cada $q_1 \in \Sigma_1$. Pero esto es (ii).
- Además, dado que
$v = H_1(p_1, p_2) \Longleftrightarrow -v = -H_1(p_1, p_2) = H_2(p_1, p_2)$,
$$-v = H_2(p_1, p_2) \geq H_2(p_1, q_2)$$
para cada $q_2 \in \Sigma_2$. Por lo tanto,
$$v \leq -H_2(p_1, q_2) = H_1(p_1, q_2)$$
para cada $q_2 \in \Sigma_2$. Pero esto es (i).

- Ya sabemos (por el hecho anterior) que

$$(\mathrm{O}.1) \quad \min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \geq \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) \quad (\mathrm{P}.1).$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Ya sabemos (por el hecho anterior) que

$$\text{(O.1)} \quad \min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \geq \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) \quad \text{(P.1)}.$$

- Tenemos que comprobar que

$$\text{(O.1)} \quad \min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) \leq \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) \quad \text{(P.1)}$$

y que

$$\min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) = v.$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Vista de un pesimista:

$$\max_{q_1 \in \Sigma_1} \underbrace{\min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)}_{\text{function of } q_1} \geq \underbrace{\min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(p_1, q_2)}_{\text{at a particular } q_1 = p_1} \underset{\text{by (i)}}{\geq} v.$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Vista de un pesimista:

$$\max_{q_1 \in \Sigma_1} \underbrace{\min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)}_{\text{function of } q_1} \geq \underbrace{\min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(p_1, q_2)}_{\text{at a particular } q_1 = p_1} \underset{\text{by (i)}}{\geq} v.$$

- Vista de un optimista

$$\min_{q_2 \in \Sigma_2} \underbrace{\max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2)}_{\text{function of } q_2} \leq \underbrace{\max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, p_2)}_{\text{at a particular } q_2 = p_2} \underset{\text{by (ii)}}{\leq} v.$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Vista de un pesimista:

$$\max_{q_1\in\Sigma_1} \underbrace{\min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(q_1,q_2)}_{\text{function of } q_1} \geq \underbrace{\min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(p_1,q_2)}_{\text{at a particular } q_1=p_1} \underset{\text{by (i)}}{\geq} v.$$

- Vista de un optimista

$$\min_{q_2\in\Sigma_2} \underbrace{\max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,q_2)}_{\text{function of } q_2} \leq \underbrace{\max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,p_2)}_{\text{at a particular } q_2=p_2} \underset{\text{by (ii)}}{\leq} v.$$

- Por lo tanto,

$$\max_{q_1\in\Sigma_1} \min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(q_1,q_2) \geq v \geq \min_{q_2\in\Sigma_2} \max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,q_2).$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Vista de un pesimista:

$$\max_{q_1\in\Sigma_1} \underbrace{\min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(q_1,q_2)}_{\text{function of } q_1} \geq \underbrace{\min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(p_1,q_2)}_{\text{at a particular } q_1=p_1} \underset{\text{by (i)}}{\geq} v.$$

- Vista de un optimista

$$\min_{q_2\in\Sigma_2} \underbrace{\max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,q_2)}_{\text{function of } q_2} \leq \underbrace{\max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,p_2)}_{\text{at a particular } q_2=p_2} \underset{\text{by (ii)}}{\leq} v.$$

- Por lo tanto,

$$\max_{q_1\in\Sigma_1} \min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(q_1,q_2) \geq v \geq \min_{q_2\in\Sigma_2} \max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,q_2).$$

- Así, por el Hecho,

$$\max_{q_1\in\Sigma_1} \min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(q_1,q_2) = \min_{q_2\in\Sigma_2} \max_{q_1\in\Sigma_1} H_1(q_1,q_2) = v.$$

Matching Pennies

Matching Pennies

		q_2	$1 - q_2$
	$1\backslash 2$	Cr	Cz
q_1	Cr	1,-1	-1, 1
$1 - q_1$	Cz	-1, 1	1,-1

Matching Pennies

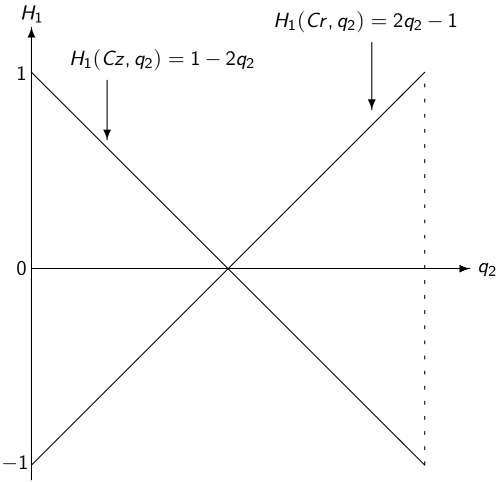
		q_2	$1-q_2$
	$1\backslash 2$	Cr	Cz
q_1	Cr	1,-1	-1, 1
$1-q_1$	Cz	-1, 1	1,-1

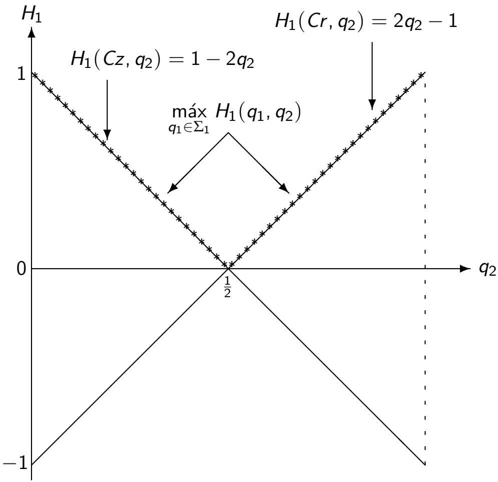
- $H_1(Cz, q_2) = -q_2 + (1-q_2) = 1 - 2q_2$.

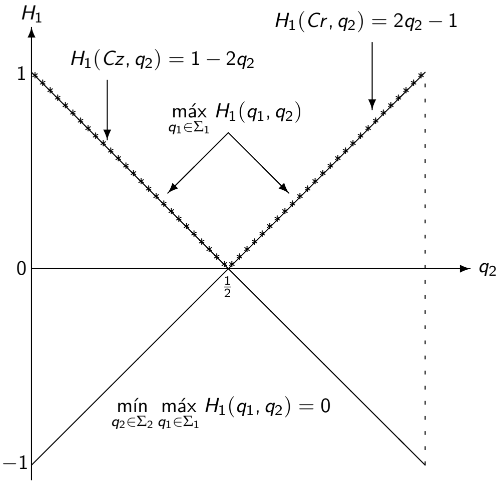
Matching Pennies

		q_2	$1-q_2$
	$1\backslash 2$	Cr	Cz
q_1	Cr	1,-1	-1, 1
$1-q_1$	Cz	-1, 1	1,-1

- $H_1(Cz, q_2) = -q_2 + (1-q_2) = 1 - 2q_2$.
- $H_1(Cr, q_2) = q_2 - (1-q_2) = 2q_2 - 1$.


H_1
$H_1(Cr, q_2) = 2q_2 - 1$
$H_1(Cz, q_2) = 1 - 2q_2$
1
0
q_2
-1


H_1
$H_1(Cr, q_2) = 2q_2 - 1$
$H_1(Cz, q_2) = 1 - 2q_2$
1
$\max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2)$
0
q_2
$\frac{1}{2}$
-1


H_1
$H_1(Cr, q_2) = 2q_2 - 1$
$H_1(Cz, q_2) = 1 - 2q_2$
1
$\max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2)$
0
q_2
$\frac{1}{2}$
$\min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) = 0$
-1

Matching Pennies

Matching Pennies

		q_2	$1-q_2$
	$1\backslash 2$	Cr	Cz
q_1	Cr	1,-1	-1, 1
$1-q_1$	Cz	-1, 1	1,-1

Matching Pennies

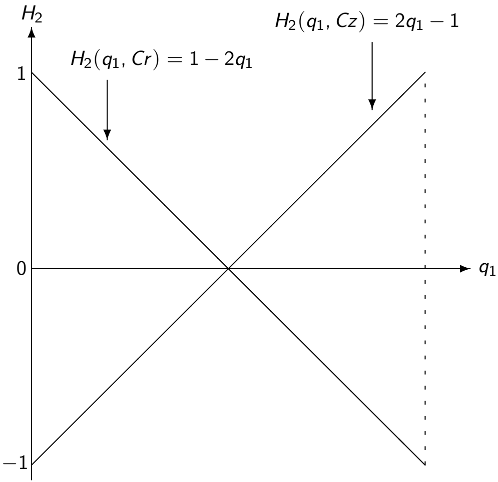
		q_2	$1-q_2$
	$1\backslash 2$	Cr	Cz
q_1	Cr	1,-1	-1, 1
$1-q_1$	Cz	-1, 1	1,-1

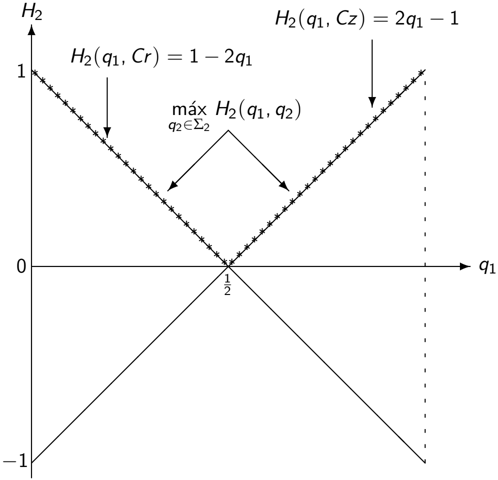
- $H_2(q_1, H) = -q_1 + (1-q_1) = 1 - 2q_1.$

Matching Pennies

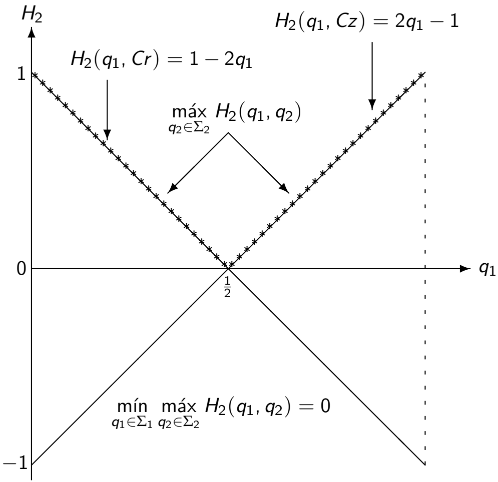
		q_2	$1-q_2$
	$1\backslash 2$	Cr	Cz
q_1	Cr	1,-1	-1, 1
$1-q_1$	Cz	-1, 1	1,-1

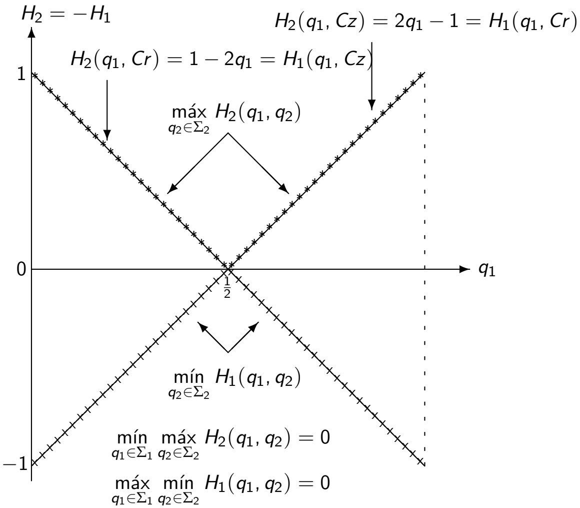
- $H_2(q_1, H) = -q_1 + (1-q_1) = 1 - 2q_1.$
- $H_2(q_1, T) = q_1 - (1-q_1) = 2q_1 - 1.$


H_2
$H_2(q_1, Cz) = 2q_1 - 1$
$H_2(q_1, Cr) = 1 - 2q_1$
1
0
-1
q_1



H_2
$H_2(q_1, Cz) = 2q_1 - 1$
$H_2(q_1, Cr) = 1 - 2q_1$
1
$\max_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2)$
0
q_1
$\frac{1}{2}$
-1


H_2
$H_2(q_1, Cz) = 2q_1 - 1$
$H_2(q_1, Cr) = 1 - 2q_1$
1
$\max\limits_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2)$
0
q_1
$\frac{1}{2}$
$\min\limits_{q_1 \in \Sigma_1} \max\limits_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2) = 0$
-1



$H_2 = -H_1$
$H_2(q_1, Cz) = 2q_1 - 1 = H_1(q_1, Cr)$
$H_2(q_1, Cr) = 1 - 2q_1 = H_1(q_1, Cz)$
1
0
−1
q_1
$\frac{1}{2}$
$\max_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2)$
$\min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2)$
$\min_{q_1 \in \Sigma_1} \max_{q_2 \in \Sigma_2} H_2(q_1, q_2) = 0$
$\max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) = 0$

- Por lo tanto,

$$\min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) = v = 0.$$

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Por lo tanto,

$$\min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) = v = 0.$$

- Además, $(q_1^*, q_2^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ and

$$H_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = H_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0.$$

- Por lo tanto,

$$\min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) = v = 0.$$

- Además, $(q_1^*, q_2^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ and

$$H_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = H_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0.$$

- Esto se llama el Teorema de Punto de Silla.

2.7.- Juegos de dos personas de suma cero

- Por lo tanto,

$$\min_{q_2 \in \Sigma_2} \max_{q_1 \in \Sigma_1} H_1(q_1, q_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} \min_{q_2 \in \Sigma_2} H_1(q_1, q_2) = v = 0.$$

- Además, $(q_1^*, q_2^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ and

$$H_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = H_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0.$$

- Esto se llama el Teorema de Punto de Silla.
- Solo se cumple para los juegos de dos personas de suma cero.

2.8.- Ficticios Juego: Idea

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

- EL juego finito en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ está jugado continuamente: $t = 1, 2, ...$

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

- EL juego finito en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ está jugado continuamente: $t = 1, 2, ...$
- El jugador $i \in I$ en el $t = 1$ elige $s_i \in S_i$ y en cualquier $t > 1$ elige una mejora respuesta (pura) a la distribución de probabilidad empírica observada de la acción de su rival, es decir, i "cree" que el comportamiento del jugador $j \neq i$ en t es la distribución empírica de acción del jugador j hasta el periodo $t - 1$. .

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

- EL juego finito en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ está jugado continuamente: $t = 1, 2, ...$
- El jugador $i \in I$ en el $t = 1$ elige $s_i \in S_i$ y en cualquier $t > 1$ elige una mejora respuesta (pura) a la distribución de probabilidad empírica observada de la acción de su rival, es decir, i "cree" que el comportamiento del jugador $j \neq i$ en t es la distribución empírica de acción del jugador j hasta el periodo $t - 1$. .
- Preguntas:

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

- EL juego finito en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ está jugado continuamente: $t = 1, 2, ...$
- El jugador $i \in I$ en el $t = 1$ elige $s_i \in S_i$ y en cualquier $t > 1$ elige una mejora respuesta (pura) a la distribución de probabilidad empírica observada de la acción de su rival, es decir, i "cree" que el comportamiento del jugador $j \neq i$ en t es la distribución empírica de acción del jugador j hasta el periodo $t - 1$. .
- Preguntas:
  1. ¿Estos procesos convergen?

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

- EL juego finito en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ está jugado continuamente: $t = 1, 2, \ldots$

- El jugador $i \in I$ en el $t = 1$ elige $s_i \in S_i$ y en cualquier $t > 1$ elige una mejora respuesta (pura) a la distribución de probabilidad empírica observada de la acción de su rival, es decir, i "cree" que el comportamiento del jugador $j \neq i$ en t es la distribución empírica de acción del jugador j hasta el periodo $t - 1$. .

- Preguntas:
  1. ¿Estos procesos convergen?

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

- EL juego finito en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ está jugado continuamente: $t = 1, 2, \ldots$
- El jugador $i \in I$ en el $t = 1$ elige $s_i \in S_i$ y en cualquier $t > 1$ elige una mejora respuesta (pura) a la distribución de probabilidad empírica observada de la acción de su rival, es decir, i "cree" que el comportamiento del jugador $j \neq i$ en t es la distribución empírica de acción del jugador j hasta el periodo $t - 1$. .
- Preguntas:
  1. ¿Estos procesos convergen? NO en general.

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

- EL juego finito en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ está jugado continuamente: $t = 1, 2, \ldots$
- El jugador $i \in I$ en el $t = 1$ elige $s_i \in S_i$ y en cualquier $t > 1$ elige una mejora respuesta (pura) a la distribución de probabilidad empírica observada de la acción de su rival, es decir, i "cree" que el comportamiento del jugador $j \neq i$ en t es la distribución empírica de acción del jugador j hasta el periodo $t - 1$. .
- Preguntas:
  1. ¿Estos procesos convergen? NO en general.
  2. Y si lo hace, ¿hay los puntos límites relacionados con Σ^*?

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

- EL juego finito en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ está jugado continuamente: $t = 1, 2, \ldots$
- El jugador $i \in I$ en el $t = 1$ elige $s_i \in S_i$ y en cualquier $t > 1$ elige una mejora respuesta (pura) a la distribución de probabilidad empírica observada de la acción de su rival, es decir, i "cree" que el comportamiento del jugador $j \neq i$ en t es la distribución empírica de acción del jugador j hasta el periodo $t - 1$. .
- Preguntas:
  1. ¿Estos procesos convergen? NO en general.
  2. Y si lo hace, ¿hay los puntos límites relacionados con Σ^*?

2.8.- Ficticios Juego: Idea

Idea: Justificación de equilibrio de Nash como el límite del siguiente comportamiento ingenuo.

- EL juego finito en forma normal $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ está jugado continuamente: $t = 1, 2, ...$
- El jugador $i \in I$ en el $t = 1$ elige $s_i \in S_i$ y en cualquier $t > 1$ elige una mejora respuesta (pura) a la distribución de probabilidad empírica observada de la acción de su rival, es decir, i "cree" que el comportamiento del jugador $j \neq i$ en t es la distribución empírica de acción del jugador j hasta el periodo $t - 1$. .
- Preguntas:
  1. ¿Estos procesos convergen? NO en general.
  2. Y si lo hace, ¿hay los puntos límites relacionados con Σ^*? A veces.