Teoría de Juegos(Código: 102477)

Módulo 1: Introducción ea la Teoría de Juegos y Ejemplos

Antonio Miralles

antonio.miralles@uab.cat

despacho B3-196

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

1.0.- Intro

- ¿Qué es un Juego?
  - Juegos de mesa: ajedrez, póker, 'monopoly'
  - Juegos deportivos: fútbol, tenis
  - Juegos de ordenador: solitario, simuladores, etc.
- ¿Qué tienen en común?
  - Restricciones por las reglas
  - Uno o varios participantes
  - Cada jugador intenta ganar, conseguir el mejor resultado posible
  - El resultado depende de: acciones del mismo jugador, acciones de otros jugadores, el entorno (por ejemplo, juegos con dados)

Tomar las decisiones que más convengan para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego, y sabiendo que los demás jugadores también influyen en los resultados con sus decisiones

1.0.- Estructura del curso

- Módulo 1. Introducción a la teoría de juegos y ejemplos
    - El objetivo de la teoría de juegos
    - Teoría de la decisión con un agente
    - Teoría de la decisión con al menos dos agentes: Teoría de Juegos
    - Historia de la teoría de juegos
    - Juegos no cooperativos versus juegos cooperativos
    - Ejemplos
- Módulo 2. Juegos en forma normal
    - Definición y ejemplos
    - Equilibrio de Nash, interpretaciones y problemas del equilibrio de Nash
    - La extensión mixta de un juego
    - Existencia de equilibrio de Nash: El teorema de Nash
    - Computación de equilibrios de Nash
    - Juegos de dos personas de suma cero: El teorema Minimax
    - Juego simulado (Fictitious play)
- *Parcial I* 20 %

1.0.- Estructura del curso

- Módulo 3. Juegos en forma extensiva
  - Preliminares
  - Información perfecta
  - Inducción hacia atrás, equilibrio de Nash y el teorema de Kuhn
  - Información imperfecta
- Módulo 4. Equilibrio de Nash y temas relacionados
  - Introducción
  - Estrategias dominantes
  - Eliminación de estrategias dominadas
  - Equilibrio perfecto en subjuegos
  - Comportamiento estratégico racionalizable
- *Parcial II* 20 %

1.0.- Estructura del curso

- Módulo 5. Juegos Cooperativos
  - Preliminares
  - El núcleo
  - El valor de Shapley
- Módulo 6. Aplicaciones
  - Negociación axiomática y estratégica
  - Mecanismos de votación
  - Implementación en estrategias dominantes
  - Reparto de costes
  - Asignaciones estables y diseño de mercados
- *Examen final* 60 %

1.1- El objetivo de Teoría de Juegos

- *Teoría de Juegos* estudia las situaciones cuando las decisiones que toman los agentes (jugadores) afectan al resultado, y los agentes tienen unas preferencias sobre el resultado del juego.
- Habitualmente suponemos que los jugadores son agentes (personas, empresas, gobiernos, etc.) racionales. Pero no es obligatorio.
- Teoría de Juegos se puede aplicar a Economía, Ciencia Política, Biología, etc.

1.1.- Juego 1. "Beauty contest"

Reglas del juego:

- Tienes que elegir un número entero del intervalo 0 a 100.
- El ganador será el que escoja el número que más se acerque a los 2/3 del promedio de todos los números elegidos
- En caso de un empate el premio se dividirá entre los ganadores.
- ¿Cuál número pones?

1.1.- Elementos de Juego

- **Jugadores** – los participantes en el juego que toman decisiones con el fin de maximizar su utilidad. Son dos o más.
- **Acciones de cada jugador** – las decisiones que puede tomar cada jugador en cada momento en que le toque jugar.
- **Resultados del juego** – los distintos modos en que puede concluir un juego.
- **Pagos** – cada jugador recibe un pago al acabar el juego, que depende de cuál haya sido el resultado del juego. Es la utilidad que cada jugador atribuye a dicho resultado. Es la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado en el juego.
- **Estrategias** Una estrategia de un jugador es un plan completo de acciones con las que éste podría proponerse participar en dicho juego. Un **perfil de estrategias** es un conjunto de estrategias, una por cada jugador.

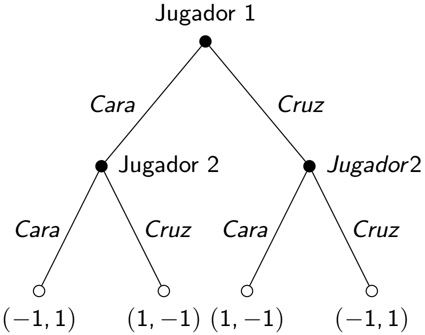
1.1.- Ejemplo: Piedra - Papel - Tijera

1. **Reglas del juego:** Los jugadores simultáneamente eligen entre {piedra, papel, tijera}
2. **Jugadores:** *Jugador 1* y *Jugador 2*
3. **Estrategias:** {piedra, papel, tijera} para cada jugador
4. **Resultado:** *Piedra* gana a *Tijera*, *Tijera* gana a *Papel*, *Papel* gana a *Piedra*
5. **Pagos:** El jugador que gana recibe **+1** del jugador que pierde (en consecuencia, el jugador 2 tiene un pago de -**1**)

		Jugador 2		
		Piedra	Papel	Tijera
Jugador 1	Piedra	(0, 0)	(-1,1)	(1,-1)
	Papel	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	Tijera	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

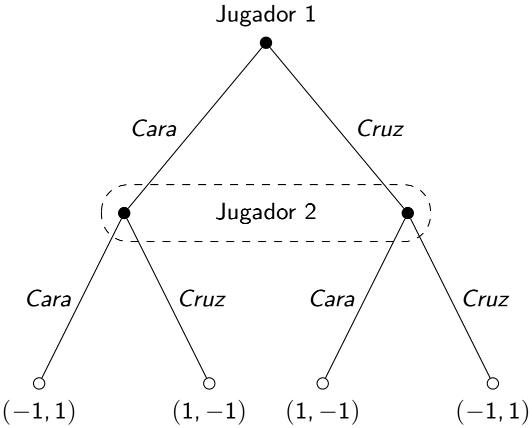
1.1.- Ejemplo: Matching pennies (secuencial)

Dos jugadores tiran una moneda. Primero tira el jugador 1, después tira el jugador 2. Si el jugador 2 obtiene el mismo resultado que el jugador 1, entonces él gana esta moneda, y el jugador 1 la pierde. Si tira algo diferente que el jugador 1, entonces pierde esta moneda, la gana el jugador 1.



1.1.- Ejemplo: Matching pennies (secuencial)

El jugador 1 gira su moneda sin que lo vea el jugador 2. El jugador 2 también gira su moneda. Si el jugador 2 escoge la misma opción que el jugador 1, entonces él gana. Sino, pierde.



1.1.- Tipos de Juegos

- Todos juegos se pueden representar en dos formas.
  - Forma normal.
  - Forma extensiva.
- Por la cantidad de información de que disponen los jugadores, los juegos pueden ser:
  - con **información completa**, cuando la función de ganancias de cada jugador es conocida por todos los jugadores,
  - con **información incompleta**, en cuyo caso un jugador al menos no conoce las ganancias de otro jugador.
- Por la cantidad de información que adquieren durante el juego, distinguimos entre:
  - **información perfecta** si en cada momento el jugador que tiene que decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento,
  - **información imperfecta**, en otro caso.

1.2.- Teoría de la decisión con un agente

- En economía se estudian a menudo situaciones de decisión individual, en las que el agente intenta maximizar su utilidad, sin importar lo que hagan otros.
- Por ejemplo:
  - Elección de cantidades de cada bien a comprar por parte de un consumidor. Se suponen dados los precios de los bienes, así como la renta del consumidor.
  - Elección de cantidades de un bien a producir por parte de una empresa precio-aceptante. Se suponen dados los precios del bien y de los factores de producción y conocida la función de producción.
  - Elección del precio de un bien por un monopolista. Se suponen dados los precios de los factores de producción y la curva de demanda de dicho bien y conocida la función de producción.

1.2.- Teoría de la decisión con un agente

- Sea A el conjunto de las *acciones* disponibles para un *agente*.
- Sea X el conjunto de los *resultados*.
- Sea $\mathcal{L}(X)$ el conjunto de distribuciones de probabilidades (loterías) en X.
    - La distribución de probabilidad en X es la función $p : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\sum_{x \in X} p(x) = 1$.
- Sea $g : A \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ la *función del resultado* tal que para cada acción posible tomada por un agente esta función asocia una distribución de probabilidad en X (la relación entre A y X puede ser incierta).
- Sea $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la *función de utilidad* del agente sobre los resultados; entonces, para cualquier par $x, y \in X$,
    (i) el agente prefiere estrictamente el resultado x a resultado y si y sólo si $u(x) > u(y)$ y
    (ii) el agente es indiferente entre los resultados x e y si y sólo si $u(x) = u(y)$.

1.2.- Teoría de la decisión con un agente

- Suponemos que las preferencias del agente $\succeq$ sobre $\mathcal{L}(X)$ satisfacen las axiomas de continuidad e independencia. En consecuencia, existe una función de utilidad $U : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa $\succeq$ y satisface la propiedad de la *utilidad esperada*. En concreto,
  - para todos $p, p' \in \mathcal{L}(X)$, $p \succeq p'$ si y sólo si $U(p) \geq U(p')$, y
  - para todos $p \in \mathcal{L}(X)$

$$U(p) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot u(x).$$

- Sea $H : A \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de utilidad inducida sobre el conjunto de acciones, tal que para cada $a \in A$,

$$H(a) = U(g(a)).$$

- Suponemos que el *conjunto de acciones factibles* F coincide con A $(F = A)$.

1.2.- Teoría de la decisión con un agente

El problema de Decisión de un Agente

- Escoger a para que

$$\begin{aligned} &\max H(a) \\ &\text{s.t. } a \in F. \end{aligned}$$

- Solución (si existe alguna): a^* (o el conjunto de soluciones).

1.2.- Teoría de la decisión con un agente. Ejemplos.

- **Ejemplo 1:** Un monopolista en el mercado tiene la siguiente función inversa de demanda:

$$p(y) = \begin{cases} \max\{10 - y, 0\} & \text{con la probabilidad } 1/2 \\ \max\{12 - y, 0\} & \text{con la probabilidad } 1/2, \end{cases}$$

  donde $y \geq 0$ es el número de producto vendido en el mercado, y que está producido según la función de costes $c(y) = y$.

- Entonces, los beneficios esperados se pueden expresar (asumiendo que $0 \leq y \leq 10$) como

$$\begin{aligned} E\pi(y) &= \tfrac{1}{2}[(10 - y)y] + \tfrac{1}{2}[(12 - y)y] - y \\ &= 10y - y^2. \end{aligned}$$

- El problema del Monopolista: escoger tal $y \in \mathbb{R}$ para que

$$\max 10y - y^2$$
$$\text{s.t. } 0 \leq y \leq 10.$$

1.2.- Teoría de la decisión con un agente. Ejemplos.

- *Solución*. Condición de primer orden (First Order Condition (FOC)) para $E\pi(y) = 10y - y^2$, asumiendo que $0 < y < 10$:

$$\frac{dE\pi(y)}{dy} = 10 - 2y = 0.$$

- Condición de segundo orden (Second order condition): $\frac{d^2E\pi(y)}{dy^2} = -2 < 0$ ($E\pi(y)$ es estrictamente cóncava).

- Entonces, $y^* = 5$ es el máximo global (tomando en cuenta que $0 < y^* = 5 < 10$); *i.e.*, $y^* = 5$ es la única solución para el problema del monopolista.

- La decisión óptima tiene la propiedad és que el ingreso marginal esperado es igual al coste marginal.

- **Ejemplo 2:** Una empresa utiliza y unidades de un producto para un proceso de R&D para obtener una invención.
- La probabilidad de éxito $p(y)$ depende de y.
  - Asumimos que $p(y) = y - y^2$ e $y \in [0, 1]$ (esto asegura que $p(y) \in [0, 1]$).
- El coste del producto es fijo e igual a 20.
- El valor de mercado de la invención (si la consiguen) es igual a 100.
- Entonces, el valor x de la invención es la siguiente variable aleatoria, que depende de y (a través de la probabilidad de éxito):

$$x(y) = \begin{cases} 100 & \text{con probabilidad } p(y) \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p(y), \end{cases}$$

1.2.- Teoría de la decisión con un agente. Ejemplos.

- Entonces, los beneficios esperados se pueden expresar (asumiendo que $y \in [0,1]$) como

$$\begin{aligned} E\pi(y) &= p(y)100 + (1 - p(y))0 - 20 \\ &= 100(y - y^2) - 20 \\ &= 100y - 100y^2 - 20. \end{aligned}$$

- El problema de la empresa: Escoger $y \in \mathbb{R}$ para que

$$\begin{gathered} \text{máx}\, 100y - 100y^2 - 20 \\ \text{t.q } y \in [0,1]. \end{gathered}$$

1.2.- Teoría de la decisión con un agente. Ejemplos.

- *Solución*. First Order Condition (FOC) para $E\pi(y) = 100y - 100y^2 - 20$, asumiendo $0 < y < 1$:

$$\frac{dE\pi(y)}{dy} = 100 - 200y = 0.$$

- Second order condition: $\frac{d^2E\pi(y)}{dy^2} = -200 < 0$ ($E\pi(y)$ es estrictamente cóncava).

- Entonces, $y^* = \frac{1}{2}$ es el máximo global (tenemos en cuenta que $0 < y^* = \frac{1}{2} < 1$); *i.e.*, $y^* = \frac{1}{2}$ es la única solución del problema de la empresa.

- La decisión óptima tiene la propiedad que el ingreso marginal esperado es igual al coste marginal, y que la probabilidad del éxito es igual a $p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

1.2.- Teoría de la decisión con un agente

- Desde un punto de vista más general y planteándolo desde una perspectiva más cercana a la realidad, asumimos que la función de resultados g (la cual asocia acciones con las distribuciones sobre el conjunto de resultados) tiene la propiedad que la distribución de probabilidad en X también depende de un parámetro $t \in T$. Entonces,
  - $g : A \times T \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ y
  - $H : A \times T \longrightarrow \mathbb{R}$, donde para todos $(a, t) \in A \times T$, $H(a, t) = U(g(a, t))$.
- El conjunto de acciones factibles también puede depender de t: para cada $t \in T$, $F(t) \subseteq A$ es el conjunto de acciones factibles para t.

1.2.- Teoría de la decisión con un agente

El problema de decisión de un agente

- Dado $t \in T$, escoger a para que

$$\begin{gathered} \max H(a, t) \\ \text{s.t. } a \in F(t). \end{gathered}$$

- Solución (si existe): $a^*(t)$ (o un conjunto de soluciones para cada $t \in T$).

1.3.- Teoría de la decisión con 2 agentes: Teoría de Juegos

- El conjunto de *jugadores* (agentes) $I = \{1, 2\}$.
- Sea A_1 el conjunto de acciones del jugador 1.
- Sea A_2 el conjunto de acciones del jugador 2.
- Un par $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ es el perfil de acciones.
- Para $i = 1, 2$, sea $u_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de utilidad sobre resultados seguros del agente i.
- Para $i = 1, 2$, sea $U_i : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de utilidad sobre distribuciones de probabilidad en X.
- Sea $g : A_1 \times A_2 \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ la *función de resultados* que asigna cada posible perfil de acciones con la distribución de probabilidad en X (ahora, un jugador posiblemente no sabe $g(a_1, a_2)$ en el caso si él no sepa las acciones del otro jugador).

1.3.- Teoría de la decisión con 2 agentes: Teoría de Juegos

- Sea $H_i : A_1 \times A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de utilidad inducida del jugador $i = 1, 2$ sobre el conjunto de perfiles de acciones. Es decir, para cada $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$,

$$H_i(a_1, a_2) = U_i(g(a_1, a_2)).$$

- Para cada perfil de acciones $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, sea $F_1(a_2) \subseteq A_1$ y $F_2(a_1) \subseteq A_2$ los conjuntos de acciones factibles del jugador 1 para a_2 y el jugador 2 para a_1, respectivamente.

- Asumimos que cada jugador no sabe las acciones que toma otro jugador (por ejemplo, si juegan simultáneamente). Entonces, sea
  - a_2^e la acción que el jugador 1 cree (o conjetura) que tomará el jugador 2 ,
  - a_1^e la acción que el jugador 2 cree (o conjetura) que tomará el jugador 1.

1.3.- Teoría de la decisión con 2 agentes: Teoría de Juegos

PROBLEMAS DE DOS JUGADORES (JUEGO NO COOPERATIVO)

- Jugador 1 : Dado a_2^e escoger a_1 para que

$$\max H_1(a_1, a_2^e)$$
$$\text{s.t. } a_1 \in F_1(a_2^e).$$

  - Solución(es) [la mejor respuesta del jugador 1]: $br_1(a_2^e)$.

- Jugador 2 : Dado a_1^e escoger a_2 para que

$$\max H_2(a_1^e, a_2)$$
$$\text{s.t. } a_2 \in F_2(a_1^e).$$

  - Solución(es) [la mejor respuesta del jugador 2]: $br_2(a_1^e)$.

- EQUILIBRIO (DE NASH): $(a_1^*, a_2^*) \in F_1(a_1^*) \times F_2(a_2^*)$ tal que $a_1^* = br_1(a_2^*)$ y $a_2^* = br_2(a_1^*)$. Formalmente,
  - la mejor respuesta dado las creencias: $a_1^* = br_1(a_2^e)$ y $a_2^* = br_2(a_1^e)$.
  - Las creencias son correctas: $a_1^e = a_1^*$ y $a_2^e = a_2^*$.

1.3.- Teoría de la decisión con 2 agentes. Ejemplos

- **Ejemplo 1:** Dos empresas en el mercado se encuentran con la siguiente función inversa de demanda:

$$p(y_1 + y_2) = \begin{cases} \max\{10 - (y_1 + y_2), 0\} & \text{con probabilidad } 1/2 \\ \max\{12 - (y_1 + y_2), 0\} & \text{con probabilidad } 1/2, \end{cases}$$

  donde $y_i \geq 0$ es la cantidad vendida por la empresa $i = 1, 2$, y el producto está producido según la función de coste $c(y_i) = y_i$.

- Entonces, los esperados beneficios de la empresa i se pueden expresar (asumiendo que $0 \leq y_1 + y_2 \leq 10$) como

$$\begin{aligned} E\pi_i(y_1, y_2) &= \tfrac{1}{2}[(10 - (y_1 + y_2))y_i] + \tfrac{1}{2}[(12 - (y_1 + y_2))y_i] - y_i \\ &= 10y_i - y_i^2 - y_i y_{3-i}. \end{aligned}$$

- El problema de la empresa i: dado y_{3-i}^e, escoger $y_i \in \mathbb{R}$ para que

$$\max 10y_i - y_i^2 - y_i y_{3-i}$$
$$\text{s.t. } 0 \leq y_i + y_{3-i}^e \leq 10.$$

- Solución. First Order Condition(s) (FOC) para $E\pi_i(y_1, y_2) = 10y_i - y_i^2 - y_i y_{3-i}$, asumiendo que $0 \leq y_i + y_{3-i}^e \leq 10$:

$$\frac{dE\pi_i(y_1, y_2)}{dy_i} = 10 - 2y_i - y_{3-i} = 0.$$

- $E\pi_i(y_1, y_2)$ es estrictamente cóncava en y_i, dado y_{3-i}, entonces FOCs son necesarias y suficientes.

- La solución simétrica es $y_1^* = y_2^* = \frac{10}{3} \in (0, 10)$.
    - Tengamos en cuenta que esto es la única solución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Entonces, $y^* = 5 < y_1^* + y_2^* = \frac{20}{3}$. ¡Consecuencias importantes!

1.3.- Teoría de la decisión con 2 agentes. Ejemplos

- **Ejemplo 2:** Cada empresa $i = 1, 2$ utiliza y_i unidades de un producto para sus procesos de R&D para conseguir una invención.
- La probabilidad que la empresa i tenga éxito $p(y_i)$ depende de y_i.
  - Asumimos $p(y_i) = y_i - y_i^2$ y $y_i \in [0, 1]$ (para asegurar que $p(y_i) \in [0, 1]$).
- El coste del producto es fijo y es igual a 20.
- El valor del mercado de la invención (si la consiguen) es igual a 100. Si ambas empresas consiguen las invenciones, entonces compartirán este valor entre ellas de manera igualitaria.
- Entonces, el valor x_i de la invención para la empresa i es la siguiente variable aleatoria, que depende de (y_1, y_2):

$$x_i(y_1, y_2) = \begin{cases} 100 & \text{con probabilidad } p(y_i)(1 - p(y_{3-i})) \\ 50 & \text{con probabilidad } p(y_i)p(y_{3-i}) \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p(y_i). \end{cases}$$

- Entonces, los beneficios esperados se pueden expresar (asumiendo $y_i \in [0,1]$) como

$$\begin{aligned} E\pi_i(y_1, y_2) &= p(y_i)(1 - p(y_{3-i}))100 + p(y_i)p(y_{3-i})50 - 20 \\ &= 50p(y_i)[2 - p(y_{3-i})] - 20 \\ &= 50(y_i - y_i^2)[2 - y_{3-i} + y_{3-i}^2] - 20. \end{aligned}$$

- El problema de la empresa i: dado y_{3-i}^2, escoger $y_i \in \mathbb{R}$ para que

$$\begin{gathered} \text{máx}\, 50(y_i - y_i^2)[2 - y_{3-i} + y_{3-i}^2] - 20 \\ \text{s.t. } y \in [0,1]. \end{gathered}$$

1.3.- Teoría de la decisión con 2 agentes. Ejemplos

- Solución. First Order Conditions (FOCs) para $E\pi_i(y_1, y_2) = 50(y_i - y_i^2)\left(2 - y_{3-i} + y_{3-i}^2\right) - 20$, asumiendo $0 < y_i < 1:$

$$\frac{dE\pi_i(y_1, y_2)}{dy_i} = 50\left(1 - 2y_i\right)\left(2 - y_{3-i} + y_{3-i}^2\right) = 0.$$

- $E\pi_i(y_1, y_2)$ es estrictamente cóncava en y_i dado y_{3-i}, entonces FOCs son necesarias y suficientes.

- Por tanto, $y_i^* = \frac{1}{2}$ es máximo global (teniendo en cuenta que $0 < y_i^* = \frac{1}{2} < 1$); *i.e.*, $y_1^* = y_2^* = \frac{1}{2}$ es la única (real) solución del problema de dos empresas.

- Las decisiones óptimas tienen la propiedad que la probabilidad de invención (*i.e.*, el éxito de una de las dos empresas) es igual a $3/16 + 3/16 + 1/16 = 7/16$.

1.3.- Teoría de la decisión con 2 agentes. Teoría de Juegos

PROBLEMA DE DOS JUGADORES (COOPERATIVO)

- Escoger a_1 y a_2 para que

$$\begin{gathered} \max H_1(a_1, a_2) + H_2(a_1, a_2) \\ \text{s.t. } a_1 \in F_1(a_2) \text{ y } a_2 \in F_2(a_1). \end{gathered}$$

- SOLUCIÓN(ES): $\hat{a}_1$ y $\hat{a}_2$.
- PREGUNTAS:
  - ¿Cómo compartir las ganancias de cooperación $H_1(\hat{a}_1, \hat{a}_2) + H_2(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$? ¿Negociación?
  - Diseñar reglas que proponen cómo dividir la cantidad máxima obtenida, teniendo en cuenta las contribuciones individuales.
  - Estabilidad de las reglas, dependiendo de sus propiedades.

1.3.- Teoría de la decisión con 2 agentes. Ejemplos

- **Ejemplo 1:** Dos empresas en el mercado se encuentran con la siguiente función inversa de demanda:

$$p(y_1 + y_2) = \begin{cases} \max\{10 - (y_1 + y_2), 0\} & \text{con probabilidad } 1/2 \\ \max\{12 - (y_1 + y_2), 0\} & \text{con probabilidad } 1/2, \end{cases}$$

  donde $y_i \geq 0$ es la cantidad del producto vendido por la empresa i, y el producto está producido según la función de costes $c(y_i) = y_i$.

- Entonces, los beneficios esperados de la empresa i se pueden expresar (asumiendo que $0 \leq y_1 + y_2 \leq 10$) como

$$\begin{aligned} E\pi_i(y_1, y_2) &= \tfrac{1}{2}[(10 - (y_1 + y_2))y_i] + \tfrac{1}{2}[(12 - (y_1 + y_2))y_i] - y_i \\ &= 10y_i - y_i^2 - y_i y_{3-i}. \end{aligned}$$

- El problema de dos empresas juntas es: Escoger $y_1 \in \mathbb{R}$ y $y_2 \in \mathbb{R}$ para que

$$\max 10y_1 - y_1^2 - 2y_1y_2 + 10y_2 - y_2^2$$
$$\text{s.t. } 0 \leq y_1 + y_2 \leq 10.$$

1.3.- Teoría de la decisión con 2 agentes. Ejemplos

- Solución. First Order Condition(s) (FOC), asumiendo que $0 < y_1 + y_2 < 10$ y $0 < y_i$: para $i = 1, 2$,

$$\frac{dE\pi_i(y_1, y_2)}{dy_i} = 10 - 2y_i - 2y_{3-i} = 0.$$

- $E\pi_i(y_1, y_2)$ es estrictamente cóncava en y_i dado y_{3-i}, por tanto FOCs son necesarias y suficientes.

- En la solución simétrica $y_1^J = y_2^J = \frac{5}{2} \in (0, 10)$.
  - Tengamos en cuenta que es la única solución simétrica para las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, pero el sistema tiene un número infinito de soluciones: cualquier (y_1, y_2) tal que $y_1 + y_2 = 5$ es una solución.

- Por tanto, $y^* = 5 = y_1^J + y_2^J < y_1^* + y_2^* = \frac{20}{3}$. ¡Consecuencias importantes!

1.4.- Historia de Teoría de Juegos

- Teoría de Juegos nació en Princeton en 1944, con el libro *Theory of Games and Economic Behavior*, escrito por John von Neumann y Oskar Morgenstern (vNM). Contenido:
  - Juegos no cooperativos: dos-personas zero-sum juegos (ajustes absolutamente competitivos).
  - Juegos cooperativos: conjuntos estables de vNM (dificultades del enfoque cooperativo: indeterminación de la solución).
- Trabajos anteriores:
  - Cournot, 1838 (equilibrio de Nash en cantidades).
  - Bertrand, 1883 (equilibrio de Nash en precios).
  - Zermelo, 1913 (ajedrez).
  - Edgeworth, 1925 (la curva de contrato).
  - von Neumann, 1928 (teorema Minimax).
  - Hotteling, 1929 (equilibrio de Nash en localizaciones).
  - Stackelberg, 1934 (equilibrio perfecto de subjuego).

1.4.- Historia de Teoría de Juegos

- Ya en los años cincuenta, Nash aporta dos conceptos más importantes [1]:
  - Equilibrio de Nash (solución no cooperativa).
    - "Equilibrium Points in $N-$Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA* 36, 48-49 (1950).
  - solución de negociación de Nash (solución cooperativa).
    - "The Bargaining Problem," *Econometrica* 18, 155-162 (1950).
- Hasta los años setenta las contribución a la Teoría de Juegos ha sido en gran parte por matemáticos.

N	A	S	H
Nash	Aumann	Shapley	Harsanyi
		Selten	

[1] El libro *A Beautiful Mind*, escrito por Sylvia Nasar en 1998.

1.4.- Historia de Teoría de Juegos

- En los años setenta la situación cambia gracias a dos razones:
  - La contribución de Harsanyi sobre cómo tratar los juegos con la información incompleta (cuando algunos aspectos de juego son desconocidos a algunos jugadores; por ejemplo, la función de utilidad de otros jugadores).
  - La teoría económica empieza a tener un interés en las situaciones no estrictamente competitivas (y entonces, el análisis estratégico es imprescindible). El comportamiento estratégico es como el problema de decisión de un agente:
    - consumidor: dado p y m eligir x para $\max u(x)$ s.t. $px \leq m$ o
    - empresa: dado p eligir y para $\max py - c(y)$.
- En los años noventa y ceros, la teoría de Juegos empieza a ser uno de los instrumentos más importantes para la Organización Industrial, Economía de la Información, Mecanismos de Decisión, Economía Política, etc.

1.4.- Historia de Teoría de Juegos: laureados Nobeles

- 1994. John C. Harsanyi, John F. Nash y Reinhard Selten.
  - *"for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games."*
- 2005. Robert J. Aumann y Thomas Schelling.
  - *"for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis."*
- 2007. Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin y Roger B. Myerson.
  - *"for having laid the foundations of mechanism design theory."*
- 2012. Alvin E. Roth y Lloyd S. Shapley.
  - *"for the theory of stable allocations and the practice of market design."*

1.5.- Juegos no cooperativos versus Cooperativos

Hay dos enfoques y familias de modelos para investigar la interacción y decisiones de los agentes racionales con los intereses potencialmente conflictivos (von Neumann y Morgenstern ya marcan la diferencia entre ellos):

- *Teoría de Juegos Cooperativos* asume que los jugadores tienen la posibilidad de firmar contratos de cooperación (y hay unas instituciones externas para implementar estos contratos).
    - vNM lo trata como diferencia entre juegos con 2 y más de 2 agentes.
    - Si hay más de dos jugadores, ellos pueden formar coaliciones y coordinar su comportamiento.
    - ¿Cuales estructuras de coalición son consistentes con el comportamiento racional en negociación?

1.5.- Juegos no cooperativos versus juegos cooperativos

- *Teoría de juegos cooperativa:*
  - Dos enfoques:
    - Positivo (enfoca en la estabilidad social): núcleo, vNM conjuntos estables, etc.
    - Normativo (enfoca en razonamiento y compromisos "justos "): el valor de Shapley, Nucleolus, etc.
  - Dos familias de modelos:
    - Utilidad transferible (TU-juegos).
    - Utilidad no-transferible (NTU-juego).

1.5.- Juegos no cooperativos versus juegos cooperativos

- *Juegos no cooperativos* asume que los acuerdos entre jugadores son imposibles.
  - Cada jugador se preocupa por su propio interés.
  - Un enfoque (positivo): análisis de equilibrio. El equilibrio de Nash es central.
  - Un resultado debe tener la propiedad de que ningún jugador puede mejorar el resultado cambiando su comportamiento.
- Sin embargo, la distinción entre juegos cooperativos y no cooperativos se puede ver muy rígida.

1.5.- Juegos no cooperativos versus juegos cooperativos

- Estudiar una clase particular de problemas desde dos puntos de vista: negociación, emparejamiento, repartimiento de costes, bancarrota, votación, etc.
- Dar a un punto de vista la visión basada en el otro punto de vista. En particular, dar la base no cooperativa a un modelo de juego cooperativo (los juegos cooperativos no utilizan explícitamente todos la información relevante sobre el conflicto).
  - El programa de Nash.

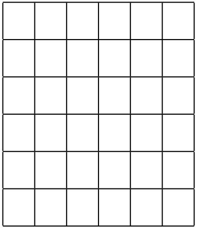
1.6.- Ejemplos

Chomp (David Gale)

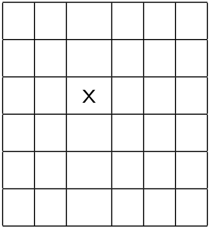
- Gale, D. "A curious Nim-type game," *American Mathematical Monthly* 81, 1974.
- Dos jugadores: $I = \{1, 2\}$. Asociamos 1 con x y 2 con o.
- Un cuadrado con $n \times n$ subquadrados.
- Reglas:
  - Empezando por el jugador 1, los jugadores eligen uno de los subcuadrados vacíos. El subcuadrado se elimina junto con todos los otros subcuadrados hacía nordeste.
  - El jugador que ocupa el último subcuadrado libre pierde.

1.6.- Ejemplos

Chomp (David Gale): $n \times n$



Chomp (David Gale): $n \times n$



Chomp (David Gale)

		X	X	X	X
		X	X	X	X
		X	X	X	X

Chomp (David Gale): $n \times n$

		X	X	X	X
		X	X	X	X
		X	X	X	X
			O	O	O
			O	O	O

Chomp (David Gale): $n \times n$

		X	X	X	X
		X	X	X	X
		X	X	X	X
			O	O	O
X			O	O	O

Chomp (David Gale)

X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	O	O	O
X	X	X	O	O	O

Chomp (David Gale): $n \times n$

X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	O	O	O
X	X	X	O	O	O
	O	O	O	O	O

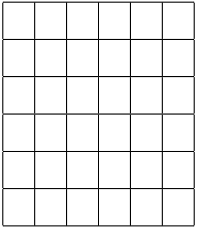
Chomp (David Gale): $n \times n$

X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	O	O	O
X	X	X	O	O	O
X	O	O	O	O	O

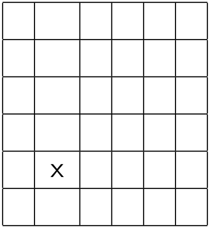
El jugador 1 pierde. El jugador 2 gana.

Chomp (David Gale): $n \times n$

- Chomp no es un juego interesante porque el jugador 1 tiene la estrategia ganadora independiente del comportamiento del jugador 2.
- Chomp es un juego aburrido si sabes como ganarlo (y lo aprendes rápido).
- Estrategia ganadora del jugador 1:



Chomp (David Gale): $n \times n$



Chomp (David Gale): $n \times n$

O	X	X	X	X	X
O	X	X	X	X	X
O	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X

Chomp (David Gale): $n \times n$

O	X	X	X	X	X
O	X	X	X	X	X
O	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X
			X	X	X

Chomp (David Gale): $n \times n$

o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
			x	x	x

Chomp (David Gale): $n \times n$

o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x

1.6.- Ejemplos

Chomp (David Gale): $n \times n$

o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x

- El jugador 1 gana.

1.6.- Ejemplos

Chomp (David Gale): $n \times (n+1)$.

- No es un juego interesante: el jugador 1 gana (Teorema de Zermelo (finite): o un jugador puede esforzar la victoria, o el otro). Prueba:
- Suponemos el contrario, el jugador 2 gana. Hipótesis: el jugador 2 tiene una estrategia óptima de responder a *cada* elección del jugador 1; *i.e*, el jugador 2 puede responder cualquier decisión posible del jugador 1 y al final ganar.
- Consideramos la siguiente estrategia del jugador 1:
  - Elegimos $(n, n+1)$.
  - Espera que elija el jugador 2: $(i, j) \neq (n, n+1)$.
  - Independiente de $(i, j) \neq (n, n+1)$, el subcuadrado $(n, n+1)$ sería eliminado de todas formas, por eso la elección $(n, n+1)$ es irrelevante.
  - Ahora el jugador 1 se comporta según la estrategia ganadora del jugador 2, después de elección por el jugador 1 (i, j). Por hipótesis, existe tal estrategia óptima.
  - En consecuencia, el jugador 1 gana. $\blacksquare$

1.6.- Ejemplos

Chomp (David Gale): $n \times (n+1)$, con $n \geq 11$.

- Sin embargo, representa un juego interesante porque para $n \geq 11$ la estrategia óptima del jugador 1 (que existe) no es conocida.
- El razonamiento es similar al de ajedrez (con un resultado adicional de empate y teniendo en cuenta que ajedrez es un juego finito, porque si se quedan pocas figuras en el tablero el empate está declarado cuando se repita la misma posición 4 veces) y también a otros juegos.
- Dos propiedades de Chomp son importantes para obtener estas conclusiones:
  - Información perfecta.
  - El número finito de posiciones (el número finito de la manera de jugar el juego).

1.6.- Ejemplos

Piratas (Moulin)

- Moulin, H. *Axioms of Cooperative Decision Making* (1st ed.). Cambridge: Cambridge University Press. Econometric Society Monographs, 1988.
- 10 piratas tienen un tesoro de 100 monedas de oro.
- Problema: ¿Cómo los comparten?
- Respuesta:
  - El pirata más viejo (pirata 10) hace una propuesta que todos votan.
  - Si por lo menos la mitad de los piratas están de acuerdo ($\#$Sí ≥ 5 y el que propone también vota), entonces la propuesta se implementa.
  - En el caso contrario ($\#$Sí < 5) los piratas tiran a este pirata viejo al mar, que está lleno de tiburones con mucha hambre...
    - El segundo pirata más viejo (pirata 9) hace la propuesta (el más viejo está ocupado con los tiburones...) para los 9 piratas.
    - ...

1.6.- Ejemplos

Piratas (Moulin)

- Suposición: todos los piratas son racionales (ya han bebido todo el rob celebrando la victoria...) y sobretodo quieren sobrevivir, y una vez aseguran que sobreviven, quieren recibir la cantidad máxima posible de las monedas. Además, todos saben que todos son racionales, todos saben que todos saben que todos son racionales, todos saben que todos saben que todos saben que todos son racionales....
- Pregunta: ¿Cuál y de quién será la propuesta que aceptan?

Piratas (Moulin)

- Respuesta: El pirata más viejo hace la propuesta (de más joven a más viejo) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 96)$ y está aceptada: $(N, Y, N, Y, N, Y, N, Y, N, Y)$.
- ¿Por qué?: Por inducción hacia atrás (la podemos aplicar teniendo el conocimiento común sobre la racionalidad de piratas).

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

1.6.- Ejemplos

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										Sí
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2	0	100									
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ / de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										No
2	0	100									Sí
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2	0	100									
3	1	0	99								
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ / de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										Sí
2	0	100									No
3	1	0	99								Sí
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ / de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2	0	100									
3	1	0	99								
4	0	1	0	99							
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ / de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										No
2	0	100									Sí
3	1	0	99								No
4	0	1	0	99							Sí
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2	0	100									
3	1	0	99								
4	0	1	0	99							
5	1	0	1	0	98						
6											
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										Sí
2	0	100									No
3	1	0	99								Sí
4	0	1	0	99							No
5	1	0	1	0	98						Sí
6											
7											
8											
9											
10											

1.6.- Ejemplos

Piratas (Moulin)

propuesta→ / de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2	0	100									
3	1	0	99								
4	0	1	0	99							
5	1	0	1	0	98						
6	0	1	0	1	0	98					
7											
8											
9											
10											

1.6.- Ejemplos

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										No
2	0	100									Sí
3	1	0	99								No
4	0	1	0	99							Sí
5	1	0	1	0	98						No
6	0	1	0	1	0	98					Sí
7											
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2	0	100									
3	1	0	99								
4	0	1	0	99							
5	1	0	1	0	98						
6	0	1	0	1	0	98					
7	1	0	1	0	1	0	97				
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
de quien↓											Votos
1	100										Sí
2	0	100									No
3	1	0	99								Sí
4	0	1	0	99							No
5	1	0	1	0	98						Sí
6	0	1	0	1	0	98					No
7	1	0	1	0	1	0	97				Sí
8											
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2	0	100									
3	1	0	99								
4	0	1	0	99							
5	1	0	1	0	98						
6	0	1	0	1	0	98					
7	1	0	1	0	1	0	97				
8	0	1	0	1	0	1	0	97			
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ / de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										No
2	0	100									Sí
3	1	0	99								No
4	0	1	0	99							Sí
5	1	0	1	0	98						No
6	0	1	0	1	0	98					Sí
7	1	0	1	0	1	0	97				No
8	0	1	0	1	0	1	0	97			Sí
9											
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2	0	100									
3	1	0	99								
4	0	1	0	99							
5	1	0	1	0	98						
6	0	1	0	1	0	98					
7	1	0	1	0	1	0	97				
8	0	1	0	1	0	1	0	97			
9	1	0	1	0	1	0	1	0	96		
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										Sí
2	0	100									No
3	1	0	99								Sí
4	0	1	0	99							No
5	1	0	1	0	98						Sí
6	0	1	0	1	0	98					No
7	1	0	1	0	1	0	97				Sí
8	0	1	0	1	0	1	0	97			No
9	1	0	1	0	1	0	1	0	96		Sí
10											

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										
2	0	100									
3	1	0	99								
4	0	1	0	99							
5	1	0	1	0	98						
6	0	1	0	1	0	98					
7	1	0	1	0	1	0	97				
8	0	1	0	1	0	1	0	97			
9	1	0	1	0	1	0	1	0	96		
10	0	1	0	1	0	1	0	1	0	96	

Piratas (Moulin)

propuesta→ de quien↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Votos
1	100										No
2	0	100									Sí
3	1	0	99								No
4	0	1	0	99							Sí
5	1	0	1	0	98						No
6	0	1	0	1	0	98					Sí
7	1	0	1	0	1	0	97				No
8	0	1	0	1	0	1	0	97			Sí
9	1	0	1	0	1	0	1	0	96		No
10	0	1	0	1	0	1	0	1	0	96	Sí

1.6.- Ejemplos

Votación estratégica

- Tres jugadores $\{1, 2, 3\}$ y tres alternativas $\{x, y, \varnothing\}$.
- Preferencias: $xP_1\varnothing P_2 y$ $\quad\varnothing P_2 x P_2 y$ $\quad y P_3 x P_3 \varnothing$.
- Reglas. *Votación secuencial por mayoría*:
  - Primero, los jugadores deciden entre x e y.
    - Si x gana, entonces ellos deciden entre x y $\varnothing$.
    - Si y gana, entonces ellos deciden entre y y $\varnothing$.
- Primera ronda: x. Segunda ronda: x.
  - El jugador 2 lo puede anticipar y votar por y en la primera ronda. Entonces, y está seleccionada en la primera ronda y $\varnothing$ está seleccionado al final (y $\varnothing P_2 x$).
  - El jugador 3 lo puede anticipar y votar por x en la primera ronda. Entonces, x está seleccionada en la primera ronda y x está seleccionada al final. Él está mejor porque $xP_3\varnothing$. El resultado vuelve a ser x (el mismo que con votación sincera). Pero ahora 2 y 3 están "engañando". Sin embargo, esto es el equilibrio (dado el comportamiento de los otros jugadores, ninguno de ellos quiere cambiar su comportamiento).

1.6.- Ejemplos

Equilibrio de Cournot (1838)

- Ruffin, R.J. "Cournot Oligopoly and Competitive Behavior," *Review of Economic Studies* 38, 1971.
- Consideramos un mercado con n empresas que producen un producto homogéneo a un precio constante por unidad, c euros.
- Sea y_i la cantidad de unidades producidos y vendidos por empresa $i = 1, ..., n$, y sea $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ la cantidad total en el mercado.
- Suponemos que la función agregada inversa de la demanda $p = D(Y)$ es
$$p = \text{máx}\{a - b \cdot Y, 0\},$$
donde p es el precio del producto, $a > c$ y $b > 0$.

Equilibrio de Cournot(1838)

SOLUCIÓN COMPETITIVA:

- La empresa i piensa que la cantidad i es pequeña, y se comporta competitivamente, asumiendo el precio como dado:
  - dado p, elige y_i tal que $\max p \cdot y_i - c \cdot y_i$.
  - El único precio con el cual el problema mencionada tiene una solución interesante es $p = c$.
  - Pero entonces, la producción de cada empresa es indeterminada. (pero pequeña para justificar la creencia que $p'(y_i) = 0$).
  - Empresas tienen los beneficios iguales a cero.
  - Por lo tanto, $Y^* = \frac{a-c}{b}$.

Equilibrio de Cournot (1838)

EQUILIBRIO DE COURNOT:

- El problema de maximización de i de empresa: dado $y_{-i} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$ eligir y_i para que

$$\text{máx}(a - b \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j) \cdot y_i - c \cdot y_i.$$

- First order condition:

$$a - 2 \cdot b \cdot y_i - b \cdot \sum_{j \neq i} y_j - c = 0. \tag{1}$$

- Second order condition: $-2 \cdot b < 0$ (La función de beneficios es estrictamente cóncava para y_i).

- Buscamos el equilibrio simétrico: $y_j = y$ para todos $j = 1, ..., n$.

1.6.- Ejemplos

Equilibrio de Cournot (1838)

- La condición (1) se puede reescribir como $a - 2by - b(n-1)y - c = 0$. Así, dependiendo del número de empresas n, la producción óptima, el precio, y los beneficios son

$$y(n) = \frac{a-c}{b \cdot (n+1)} \qquad p(n) = \frac{a + n \cdot c}{n+1} \qquad \pi(n) = \frac{(a-c)^2}{b \cdot (n+1)^2}.$$

- Vemos que $\text{lím}_{n\to\infty} y(n) = 0$, $\text{lím}_{n\to\infty} Y(n) = \frac{a-c}{b}$, $\text{lím}_{n\to\infty} p(n) = c$, y $\text{lím}_{n\to\infty} \pi(n) = 0$.

- La secuencia de equilibrio de Cournot converge al equilibrio competitivo.

- Este hecho da la base no cooperativa (estratégica) al equilibrio competitivo.

Guantes (Shapley)

- Shapley, L.S. "The Solutions of a Symmetric Market Game," *Annals of Mathematical Studies* 40, 1959.
- Tres jugadores $\{1, 2, 3\}$, 1 y 2 tienen un guante izquierdo mientras 3 tiene un guante derecho.
- El par de guantes vale 1 unidad, en caso de un par incorrecto, cero.
- Función característica v (la cantidad de unidades (pares) que cada coalición puede garantizar):

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 1 \\ v(\{1,2,3\}) = 1. & & \end{array}$$

- ¿Cuál es la distribución estable de esta unidad de utilidad entre los tres jugadores?
- Núcleo (basado en idea de bloqueo): $C(v) = \{(0, 0, 1)\}$.

1.6.- Ejemplos

Guantes (Shapley)

- Suponemos $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$ y $z < 1$.
  - Entonces, se cumple $x > 0$ o $y > 0$.
  - Suponemos $y > 0$. Como $x + z < 1 = v(\{1, 3\})$, 1 y 3 juntos pueden compartir 1 en la manera siguiente: $(x + \frac{y}{2}, z + \frac{y}{2})$.
  - Así, la coalición $\{1, 3\}$ bloquea (x, y, z).
- El poder monopolista del jugador 3 junto con la competición entre 1 y 2 lleva al resultado $(0, 0, 1)$.
- ¿es "justa" la distribución de la unidad de utilidad? Al finar, jugador 3 solo recibe utilidad cero.

1.6.- Ejemplos

Guantes (Shapley) Shapley, L.S. “Some Topics in Two-person Games,” in *Advances in Game Theory*, editors: M. Dresher, J. Shapley, and A. Tucker. Princeton: Princeton University Press, 1964.

- Suponemos que los jugadores llegan en un orden, y todas las ordenaciones son igualmente probables ($= 1/6$). Las contribuciones marginales para cada orden son:

Orden	1	2	3
123	0	0	1
132	0	0	1
213	0	0	1
231	0	0	1
312	1	0	0
321	0	1	0
$Sh(v) =$	$1/6$	$1/6$	$4/6$

- ¿Propiedades? ($Sh(v) \notin C(v)$). Caracterización axiomática.

1.6.- Ejemplos

Bancarrota (Talmud, 2.000 años Antes de Cristo, Aumann y Maschler)

- Aumann, R. and M. Maschler. “Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud,” *Journal of Economic Theory* 36, 1985.
- Un hombre se muere, dejando las deudas $d_1, ..., d_n$ mayores que su herencia E.
- ¿Cómo la herencia E tiene que ser compartida entre los acreedores?
- Los leyes modernos en mayoría proponen que proporcionalmente, *i.e.*, $x_i = \frac{E \cdot d_i}{d_1 + ... + d_n}$ para cada $i = 1, ..., n$.
- Aumann y Mascher (1985) vuelvan a interpretar el ejemplo en el Talmud.

1.6.- Ejemplos

Bancarrota (Talmud, 2.000 años Antes de Cristo, Aumann y Maschler)

	$d_1 = 100$	$d_2 = 200$	$d_3 = 300$	
$E^1 = 100$	$100/3$	$100/3$	$100/3$	División igualitaria
$E^2 = 200$	50	75	75	?
$E^3 = 300$	50	100	150	Proporcional

- ¿Hay algún razonamiento único que justifica las tres propuestas?
- ¡Sí!, la idea es consistente con la siguiente solución del problema $(E = 1; d_1 = 1, d_2 = 1/2)$:
  - 1 concede 0 a 2, 2 concede $1/2$ a 1, más división igualitaria $(1/4)$ del resto $(1/2)$, por lo tanto,
  - $x_1 = 1/2 + 1/4 = 3/4$ y $x_2 = 0 + 1/4 = 1/4$.
  - Solución: $(3/4, 1/4)$. Coincide con el Nuecleolo (Schemeidler, 1969) de juego TU v definido en la siguiente forma: para cada $S \in 2^N$,

$$v(S) = \text{máx}\{E - \textstyle\sum_{j \notin S} d_j, 0\}.$$

1.6.- Ejemplos

Bancarrota (Talmud, 2.000 años Antes de Cristo, Aumann y Maschler)

$\{1,2\}$	$d_1 = 100$	$d_2 = 200$	$x_3^k,\ k = 1,2,3$
$e^1 = 200/3$	$100/3$	$100/3$	$100/3$
$e^2 = 125$	50	75	75
$e^3 = 150$	50	100	150

Bancarrota (Talmud, 2.000 años Antes de Cristo, Aumann y Maschler)

$\{1,3\}$ $\qquad$ $x_2^k,\ k = 1,2,3$

	$d_1 = 100$	$d_3 = 300$	
$e^1 = 200/3$	$100/3$	$100/3$	$100/3$
$e^2 = 125$	50	75	75
$e^3 = 200$	50	150	100

Bancarrota (Talmud, 2.000 años Antes de Cristo, Aumann y Maschler)

$\{2,3\}$ $\qquad$ $x_1^k,\ k = 1,2,3$

	$d_2 = 200$	$d_3 = 300$	x_1^k
$e^1 = 200/3$	$100/3$	$100/3$	$100/3$
$e^2 = 150$	75	75	50
$e^3 = 250$	100	150	50